

Carlos Alberto Rezende de Carvalho Junior

**Interpolação polinomial com multiextrapolação  
de Richardson  
para reduzir o erro de discretização em malhas  
não uniformes 1D**

CURITIBA

2015

Carlos Alberto Rezende de Carvalho Junior

**Interpolação polinomial com multiextrapolação de  
Richardson  
para reduzir o erro de discretização em malhas não  
uniformes 1D**

Dissertação de mestrado apresentada como requisito parcial do grau de Mestre em Ciências ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia do setor de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal do Paraná.

Universidade Federal do Paraná

Setor de Ciências Exatas e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia

Orientador: Professor Doutor Carlos Henrique Marchi

Coorientador: Professor Doutor Márcio André Martins

CURITIBA

2015

Carvalho Junior, Carlos Alberto Rezende de  
Interpolação polinomial com multiextrapolação de Richardson para  
reduzir o erro de discretização em malhas não uniformes 1D / Carlos  
Alberto Rezende de Carvalho Junior. – Curitiba, 2015.  
148 f. : il., tabs.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Paraná, Setor  
de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Métodos  
Numéricos em Engenharia.

Orientador: Carlos Henrique Marchi  
Coorientador: Márcio André Martins

1. Erro de discretização. 2. Multiexploração de Richardson. 3.  
Interpolação. I. Marchi, Carlos Henrique. II. Martins, Márcio André.  
III. Título.

CDD 511.42

## TERMO DE APROVAÇÃO

CARLOS ALBERTO REZENDE DE CARVALHO JUNIOR

INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL COM MULTIEXTRAPOLAÇÃO DE RICHARDSON  
PARA REDUZIR O ERRO DE DISCRETIZAÇÃO EM MALHAS NÃO UNIFORMES –

1D

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de mestre no Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:



---

Prof. Dr. Márcio André Martins

Coorientador – Membro da UNICENTRO – Guarapuava/PR.



---

Prof. Dr. Luciano Kiyoshi Araki

Membro do PPGMNE/UFPR



---

Prof. Dr. Saulo Pomponet Oliveira

Membro do Dep. de Matemática da UFPR

# Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Carlos Henrique Marchi pela dedicação, sabedoria compartilhada, amizade, paciência e acima de tudo confiança.

Agradeço ao meu coorientador, Prof. Dr. Márcio André Martins pela dedicação, amizade e pelo conhecimento compartilhado.

Agradeço aos membros da banca examinadora, Prof. Dr. Luciano Kiyoshi Araki e Prof. Dr Saulo Pomponet Oliveira pelo tempo dispensado à leitura deste trabalho.

Agradeço aos meus familiares e amigos pelo apoio incondicional.

Agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia (PPGMNE) da Universidade Federal do Paraná (UFPR), à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela oportunidade de cursar o mestrado.

*“No xadrez, como na vida,  
o adversário mais perigoso é você mesmo”  
Vasily Vasiliyevich Smyslov*

# Resumo

Neste trabalho emprega-se a Multiextrapolação de Richardson (MER) para reduzir o erro de discretização ( $Eh$ ), na área de Dinâmica dos Fluidos Computacional (em inglês *Computational Fluid Dynamics* (CFD)), que consiste em uma técnica de pós processamento de dados para reduzir  $Eh$ . Para atingir este objetivo utiliza-se uma nova metodologia, proposta em 2013 para malhas uniformes, em que se aplica interpolações polinomiais. Através desta metodologia, MER teve seu desempenho melhorado: a magnitude dos erros de discretização reduziu progressivamente com o refinamento da malha, com um concomitante aumento das suas ordens de acurácia, até mesmo em variáveis de interesse cuja localização não é fixa, até então na literatura, MER era considerada de baixo desempenho neste tipo de variável. Com o intuito de estender este significativo resultado de 2013, esta metodologia foi estendida para malhas não uniformes unidimensionais. Como problema-modelo é considerado a equação de Poisson 1D, utilizando dois tipos de malha inicial, e refinamento uniforme. A discretização dessa equação foi realizada com o método de Diferenças Finitas. Nas variáveis de interesse estudadas, testou-se vários graus de interpolação e foram alcançados resultados semelhantes com os apresentados para este mesmo problema utilizando malhas uniformes, com MER, isto é, o erro de discretização teve redução significativa.

Palavras-chave: Erro de discretização. Multiextrapolação de Richardson (MER). Interpolação polinomial. Dinâmica dos fluidos computacional (CFD). Equação de Poisson 1D. Método de Diferenças Finitas.

# Abstract

This work applies the Repeated Richardson Extrapolation (RRE) to reduce the discretization error ( $Eh$ ) in Computational Fluid Dynamics (CFD), consisting of a post-data processing technique to reduce  $Eh$ . Therefore, to use RRE, we use a new methodology, created in 2013 for uniform grids, which works with the use of polynomial interpolation. Using this methodology, RRE had its performance improved: the magnitude of the discretization errors was reduced progressively with mesh refinement, with a concomitant increase in its accuracy orders, even variables of interest whose location is not fixed, so far in the literature, RRE was considered underperforming in this type of variable. We adapted this methodology to non-uniform one-dimensional meshes, with intent of extending this significant recent result for non-uniform grids. As problem-model we consider the Poisson equation 1D using two types of initial mesh with uniform refinement. The discretization of equation is performed using the Finite Difference Method. In the interest variables studied in this work, it was tested various degrees of interpolation and obtained similar results to those presented to the same problem for uniform meshes with RRE, in the other words, the  $Eh$  had a significant reduction.

Keywords: Discretization error, Repeated Richardson Extrapolation (RRE), Polynomial Interpolation, Computational Fluid Dynamics (CFD), 1D Poisson Equation, Finite Difference Method.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Métodos de solução de problemas de engenharia (MARCHI, 2001). . .	18
Figura 2 – Desempenho de MER na variável do tipo I, em malha não uniforme. .	21
Figura 3 – Exemplos de malhas (SCHNEIDER, 2007). . . . .	24
Figura 4 – Malha unidimensional não uniforme. . . . .	27
Figura 5 – Multiextrapolação de Richardson (Algoritmo), adaptado de Martins (2013). . . . .	39
Figura 6 – Malha discretizada inicial ( $g$ ), intervalo $\Omega[0, L]$ . . . . .	41
Figura 7 – Malha $g_1$ , resultante do refino de razão dois a partir da malha inicial $g$ . .	42
Figura 8 – Exemplo do esquema de refino uniforme com razão 2, aplicado em malhas não uniformes. . . . .	42
Figura 9 – Tipos de variáveis (MARTINS, 2013; MARTINS et al., 2013). . . . .	43
Figura 10 – Intervalo discretizado, malha inicial A. . . . .	45
Figura 11 – Efeito da ordem $pEm$ , de acordo com o número de extrapolações $m$ , adaptado de Marchi et al. (2013). . . . .	49
Figura 12 – MER aplicado em variável do tipo I, malha A, variável $T_{P_1}$ , com 25 extrapolações. . . . .	50
Figura 13 – MER aplicado na variável do tipo I, malha A, variável $T_m$ , com 25 extrapolações. . . . .	51
Figura 14 – $Eh$ e $Em$ da variável $\left(\frac{dT}{dx}\right)\bigg _x$ com 25 extrapolações, malha A. . . . .	52
Figura 15 – $pEh$ e $pEm$ da variável $\left(\frac{dT}{dx}\right)\bigg _x$ com 25 extrapolações, malha A. . . . .	53
Figura 16 – Influência do erro de interpolação ( $\xi_n$ ) no erro de discretização ( $Eh$ ), para obtenção da variável de interesse $T_{2/3}$ , malha A. . . . .	56
Figura 17 – MER aplicado na variável do tipo III, malha A, variável $T_{2/3}$ , com 22 extrapolações. . . . .	57
Figura 18 – MER aplicado na variável do tipo III, malha A, variável $T_{2/3}$ , com 17 extrapolações. . . . .	58
Figura 19 – Influência do erro de interpolação ( $\xi_n$ ) no erro de discretização ( $Eh$ ), para obtenção da variável de interesse $x_{max}$ , malha A. . . . .	60
Figura 20 – $Eh$ da da variável de interesse $T_{max}$ , malha A. . . . .	61
Figura 21 – Influência de $pEh$ em $pEm$ , aplicado na variável do tipo V, malha A, variável $x_{max}$ , com o máximo de extrapolações possíveis. . . . .	62
Figura 22 – MER aplicado na variável do tipo V, malha A, variável $x_{max}$ , com o máximo de extrapolações possíveis. . . . .	63
Figura 23 – Influência de $pEh$ em $pEm$ , aplicado na variável do tipo V, malha A, variável $T_{max}$ , com o máximo de extrapolações possíveis. . . . .	64

Figura 24 – MER aplicado na variável do tipo V, malha A, variável $T_{max}$ , com o máximo de extrapolações possíveis. . . . .	65
Figura 25 – MER aplicado em variável do tipo I, malha B, variável $T_{P_4}$ . . . . .	66
Figura 26 – MER aplicado na variável do tipo I, malha B, variável $T_m$ . . . . .	67
Figura 27 – MER aplicado na variável do tipo I, malha B, variável $\left(\frac{dT}{dx}\right)\bigg _x$ . . . . .	68
Figura 28 – Influência do erro de interpolação ( $\xi_n$ ) no erro de discretização ( $Eh$ ), para obtenção da variável de interesse $T_{2/3}$ , malha B. . . . .	69
Figura 29 – Influência de $pEh$ em $pEm$ , aplicado na variável do tipo III, malha B, variável $T_{2/3}$ . . . . .	70
Figura 30 – MER aplicado na variável do tipo III, malha B, variável $T_{2/3}$ . . . . .	71
Figura 31 – Erro de interpolação ( $\xi_n$ ), variável $x_{max}$ , malha B. . . . .	71
Figura 32 – $Eh$ das variáveis $x_{max}$ e $T_{max}$ , malha B. . . . .	72
Figura 33 – Influência de $pEh$ em $pEm$ , aplicado na variável do tipo V, malha B, variável $x_{max}$ , com o máximo de extrapolações possíveis. . . . .	73
Figura 34 – Influência de $pEh$ em $pEm$ , aplicado na variável do tipo V, malha B, variável $T_{max}$ , com o máximo de extrapolações possíveis. . . . .	74
Figura 35 – MER aplicado nas variáveis $x_{max}$ e $T_{max}$ do tipo V, malha B, com o máximo de extrapolações possíveis. . . . .	75
Figura 36 – Efeito da precisão de armazenamento utilizada no desempenho de $Em1$ ( $Em$ ) e $Eh$ . Adaptado de Marchi et al. (2013). . . . .	85
Figura 37 – MER aplicado em variável do tipo I, malha A, variável $T_{P_2}$ , com 25 extrapolações. . . . .	88
Figura 38 – $Em$ e $Eh$ com o máximo de extrapolações possíveis, até chegar no erro de máquina, variável $T_{2/3}$ , malha A. . . . .	97
Figura 39 – $pEh$ e $pEm$ com o máximo de extrapolações possíveis, malha A, variável $T_{2/3}$ . . . . .	98
Figura 40 – $Eh$ e $Em$ dos pontos nodais ( $T_{P_I}$ ), malha B. . . . .	120
Figura 41 – $pEh$ e $pEm$ dos pontos nodais ( $T_{P_I}$ ), malha B. . . . .	121

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Ordens verdadeiras das aproximações em diferenças finitas, obtidas a priori. . . . .	29
Tabela 2 – Ordens verdadeiras e assintóticas obtidas a priori em diferenças finitas.	36
Tabela 3 – Metodologia para o emprego de MER (MARTINS et al., 2013). . . . .	44
Tabela 4 – Classificação das variáveis de interesse para aplicação de MER. . . . .	47
Tabela 5 – Soluções analíticas exatas ( $\Phi$ ) das variáveis de interesse com mais de 30 casas decimais, malha A. . . . .	85
Tabela 6 – Resultados, $T(P_1)$ , $P_1 = 0,35$ , malha A. . . . .	86
Tabela 7 – Resultados, $T(P_2)$ , $P_2 = 0,5$ , malha A. . . . .	87
Tabela 8 – Resultados, Temperatura média ( $T_m$ ), malha A. . . . .	89
Tabela 9 – Resultados, Inclinação, $x = 0$ , malha A. . . . .	90
Tabela 10 – Resultados, Inclinação, $x = 1$ , malha A. . . . .	91
Tabela 11 – módulo de $Eh$ , variável $T_{2/3}$ , malha A. . . . .	93
Tabela 12 – módulo de $Em$ , variável $T_{2/3}$ , malha A. . . . .	94
Tabela 13 – Ordem efetiva sem MER ( $pEh$ ), variável $T_{2/3}$ , malha A. . . . .	95
Tabela 14 – Ordem efetiva (acurácia) com MER ( $pEm$ ), variável $T_{2/3}$ , malha A. . .	96
Tabela 15 – $Eh$ obtido com quantidade reduzida de malhas e com malha inicial mais fina, obtida do refino da malha A, variável $T_{2/3}$ . . . . .	100
Tabela 16 – $Em$ obtido com quantidade reduzida de malhas e com malha inicial mais fina, obtida do refino da malha A, variável $T_{2/3}$ . . . . .	101
Tabela 17 – $pEh$ obtido com quantidade reduzida de malhas e com malha inicial mais fina, obtida do refino da malha A, variável $T_{2/3}$ . . . . .	102
Tabela 18 – $pEm$ obtido com quantidade reduzida de malhas e com malha inicial mais fina, obtida do refino da malha A, variável $T_{2/3}$ . . . . .	103
Tabela 19 – Módulo de $Eh$ , variável $x_{max}$ , malha A. . . . .	105
Tabela 20 – Módulo de $Em$ , variável $x_{max}$ , malha A. . . . .	106
Tabela 21 – Ordem efetiva (acurácia) sem MER ( $pEh$ ), variável $x_{max}$ , malha A. . .	107
Tabela 22 – Ordem efetiva (acurácia) com MER ( $pEm$ ), variável $x_{max}$ , malha A. .	108
Tabela 23 – Módulo de $Eh$ , variável $T_{max}$ , malha A. . . . .	110
Tabela 24 – Módulo de $Em$ , variável $T_{max}$ , malha A. . . . .	111
Tabela 25 – Ordem efetiva (acurácia) sem MER ( $pEh$ ), variável $T_{max}$ , malha A. . .	112
Tabela 26 – Ordem efetiva (acurácia) com MER ( $pEm$ ), variável $T_{max}$ , malha A. .	113
Tabela 27 – Módulo do erro de discretização sem MER, variável $T_{P_i}$ , malha B. . . .	116
Tabela 28 – Módulo do erro de discretização com MER, temperatura nos pontos nodais, malha B. . . . .	117
Tabela 29 – Ordem efetiva sem MER, temperatura nos pontos nodais ( $P_i$ ), malha B.	118

Tabela 30 – Ordem efetiva com MER, temperatura nos pontos nodais, malha B. . .	119
Tabela 31 – Resultados, Temperatura média ( $T_m$ ), malha B. . . . .	122
Tabela 32 – Resultados, inclinação, $x = 0$ , malha B. . . . .	123
Tabela 33 – Resultados, inclinação, $x = 1$ , malha B. . . . .	124
Tabela 34 – módulo de $Eh$ , variável $T_{2/3}$ , malha B. . . . .	126
Tabela 35 – módulo de $Em$ , variável $T_{2/3}$ , malha B. . . . .	127
Tabela 36 – Ordem efetiva sem MER ( $pEh$ ), variável $T_{2/3}$ , malha B. . . . .	128
Tabela 37 – Ordem efetiva com MER ( $pEm$ ), variável $T_{2/3}$ , malha B. . . . .	129
Tabela 38 – Módulo de $Eh$ , variável $x_{max}$ , malha B. . . . .	131
Tabela 39 – Módulo de $Em$ , variável $x_{max}$ , malha B. . . . .	132
Tabela 40 – Ordem efetiva (acurácia) sem MER ( $pEh$ ), variável $x_{max}$ , malha B. . .	133
Tabela 41 – Ordem efetiva (acurácia) com MER ( $pEm$ ), variável $x_{max}$ , malha B. . .	134
Tabela 42 – Módulo de $Eh$ , variável $T_{max}$ , malha B. . . . .	136
Tabela 43 – Módulo de $Em$ , variável $T_{max}$ , malha B. . . . .	137
Tabela 44 – Ordem efetiva (acurácia) sem MER ( $pEh$ ), variável $T_{max}$ , malha B. . .	138
Tabela 45 – Ordem efetiva (acurácia) com MER ( $pEm$ ), variável $T_{max}$ , malha B. . .	139
Tabela 46 – Pontos escolhidos para interpolações de ordem 2 à 10. . . . .	142
Tabela 47 – Erro de interpolação, malha A, variável $T_{2/3}$ . . . . .	145
Tabela 48 – Erro de interpolação, malha A, variável $x_{max}$ . . . . .	146
Tabela 49 – Erro de interpolação, malha B, variável $T_{2/3}$ . . . . .	147
Tabela 50 – Erro de interpolação, malha B, variável $x_{max}$ . . . . .	148

# Lista de abreviaturas e siglas

CDS	Central Difference Scheme.
CFD	Dinâmica dos Fluidos Computacional (em inglês <i>Computational Fluid Dynamics</i> ).
DDS	Downstream Differencing Scheme.
ER	Extrapolação de Richardson.
Eq	Equação.
MER	Multiextrapolação de Richardson.
MDF	Método de diferenças finitas.
MVF	Método de volumes finitos.
RRE	Repeated Richardson Extrapolation.
TDMA	Tridiagonal Matrix Algorithm.
UDS	Upwind Differencing Scheme.
V & V	Verificação é Validação.

# Lista de símbolos

$T_{\text{DDS}-2}^{(i)}$	Aproximação do tipo DDS para a derivada de primeira ordem.
$T_{\text{UDS}-2}^{(i)}$	Aproximação do tipo UDS para a derivada de primeira ordem.
$T_{\text{CDS}}^{(ii)}$	Aproximação do tipo CDS para a derivada de segunda ordem.
$Eh$	Erro de discretização sem MER da variável de interesse.
$Em$	Erro de discretização com MER da variável de interesse.
$\xi_p$	Erro de interpolação cometido pelo polinômio de ordem $p$ .
$Eh, p$	Erro de discretização sem MER, obtida com interpolação de ordem $p$ da variável de interesse.
$Em, p$	Erro de discretização com MER, obtida com interpolação de ordem $p$ da variável de interesse.
$E$	Erro numérico.
$Eh, x$	Erro de discretização sem MER, obtida na inclinação avaliada no ponto $x$ .
$Em, x$	Erro de discretização com MER, obtida na inclinação avaliada no ponto $x$ .
$h_j$	Espaçamento entre os nós, caso não uniforme.
$h$	Espaçamento entre os nós da malha para o caso uniforme, ou um vetor contendo os espaçamentos $h_j$ para o caso não uniforme.
$Eh, T_{P_i}$	Erro de discretização sem MER da temperatura $T_{P_i}$ .
$Em, T_{P_i}$	Erro de discretização com MER da temperatura $T_{P_i}$ .
$U$	Incerteza do erro, da variável de interesse.
$\left(\frac{dT}{dx}\right)\Big _x$	Inclinação avaliada no ponto $x$ .
$\Phi$	Solução analítica exata.
$\Phi_\infty$	Solução analítica aproximada.
$p_U$	Ordem aparente da variável de interesse.

$p_E$	Ordem efetiva da variável de interesse.
$p_0$	Ordem assintótica.
$pEh, x$	Ordem efetiva sem MER, obtida na inclinação avaliada no ponto $x$ .
$pEm, x$	Ordem efetiva com MER, obtida na inclinação avaliada no ponto $x$ da variável de interesse.
$pEh$	Ordem Efetiva (acurácia) sem MER da variável de interesse.
$pEm$	Ordem Efetiva (acurácia) com MER da variável de interesse.
$pEh, T_{P_i}$	Ordem efetiva sem MER da temperatura $T_{P_i}$ .
$pEm, T_{P_i}$	Ordem efetiva com MER da temperatura $T_{P_i}$ .
$pEh, p$	Ordem efetiva sem MER, obtida com interpolação de ordem $p$ da variável de interesse.
$pEm, p$	Ordem efetiva com MER, obtida com interpolação de ordem $p$ da variável de interesse.
$\varphi_p$	Polinômio de ordem $p$ .
$P_i$	Pontos nodais com exceção dos extremos da malha inicial.
$T_{P_i}$	Temperatura avaliada nos pontos nodais da malha inicial, com exceção dos extremos.
$x_{max}$	Ponto onde a temperatura é máxima.
$r$	Razão de refino.
$T_m$	Temperatura média.
$T_{max}$	Temperatura máxima.
$T_{2/3}$	Temperatura avaliada no ponto 2/3.
$T_i$	Temperatura avaliada no nó $i$ .
$\phi$	Solução Numérica (Variável de interesse).

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>18</b>
<b>1.1</b>	<b>DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA</b>	<b>20</b>
<b>1.2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>21</b>
<b>1.3</b>	<b>OBJETIVOS</b>	<b>24</b>
<b>1.4</b>	<b>ORGANIZAÇÃO DO TEXTO</b>	<b>25</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>26</b>
<b>2.1</b>	<b>PROBLEMA MODELO</b>	<b>26</b>
<b>2.2</b>	<b>MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS (MDF)</b>	<b>26</b>
2.2.1	Aproximação DDS-2 e UDS-2	27
2.2.2	Aproximação CDS	28
2.2.3	Temperatura média	29
2.2.4	MDF, caso uniforme	29
<b>2.3</b>	<b>INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL</b>	<b>29</b>
2.3.1	Polinômio de Interpolação	30
2.3.2	Diferença dividida de Newton	31
2.3.3	Fórmula de Lagrange	31
2.3.4	Erro na Interpolação	31
<b>2.4</b>	<b>MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO</b>	<b>32</b>
<b>2.5</b>	<b>ERRO NUMÉRICO</b>	<b>32</b>
2.5.1	Erro de truncamento e ordens verdadeiras	33
2.5.2	Erro de iteração	33
2.5.3	Erro de arredondamento	34
2.5.4	Erro de programação	34
2.5.5	Erro de discretização e ordem efetiva	34
<b>2.6</b>	<b>EXTRAPOLAÇÃO DE RICHARDSON</b>	<b>37</b>
2.6.1	Multiextrapolação de Richardson	38
<b>2.7</b>	<b>RESUMO DO CAPÍTULO 2</b>	<b>40</b>
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA PARA O EMPREGO DE MER</b>	<b>41</b>
<b>3.1</b>	<b>REFINO DA MALHA</b>	<b>41</b>
3.1.1	Geração das malhas	41
<b>3.2</b>	<b>APLICAÇÃO DE MER</b>	<b>43</b>
<b>3.3</b>	<b>MODELO MATEMÁTICO</b>	<b>44</b>
<b>3.4</b>	<b>RESUMO DO CAPÍTULO 3</b>	<b>47</b>



<b>4</b>	<b>RESULTADOS . . . . .</b>	<b>48</b>
<b>4.1</b>	<b>RESULTADOS DA MALHA A . . . . .</b>	<b>49</b>
4.1.1	Variável $T_{P_1}$ . . . . .	49
4.1.2	Temperatura média . . . . .	50
4.1.3	Inclinação . . . . .	52
4.1.4	Variável $T_{2/3}$ . . . . .	53
4.1.5	Variáveis $x_{max}$ e $T_{max}$ . . . . .	59
<b>4.2</b>	<b>RESULTADOS DA MALHA B . . . . .</b>	<b>65</b>
4.2.1	Variável $T_{P_4}$ . . . . .	66
4.2.2	Temperatura média . . . . .	67
4.2.3	Inclinação . . . . .	68
4.2.4	Variável $T_{2/3}$ . . . . .	69
4.2.5	Variáveis $x_{max}$ e $T_{max}$ . . . . .	71
<b>4.3</b>	<b>RESUMO DO CAPÍTULO 4 . . . . .</b>	<b>76</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>77</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>78</b>
	<b>APÊNDICES . . . . .</b>	<b>81</b>
	<b>APÊNDICE A – RESULTADOS ADICIONAIS . . . . .</b>	<b>82</b>
<b>A.1</b>	<b>OBTENÇÃO DAS SOLUÇÕES NUMÉRICAS . . . . .</b>	<b>82</b>
A.1.1	Discretização do modelo . . . . .	82
A.1.2	Obtenção numérica das variáveis $T_{P_i}$ . . . . .	83
A.1.3	Obtenção numérica da variável $T_m$ . . . . .	83
A.1.4	Obtenção numérica da inclinação . . . . .	84
<b>A.2</b>	<b>RESULTADOS DA MALHA A . . . . .</b>	<b>84</b>
A.2.1	Coordenada nodal $T(P_1)$ , $P_1 = 0,35$ . . . . .	86
A.2.2	Coordenada nodal $T(P_2)$ , $P_2 = 0,5$ . . . . .	87
A.2.3	Temperatura média . . . . .	89
A.2.4	Inclinação $\left(\frac{dT}{dx}\right)\bigg _x$ . . . . .	90
A.2.4.1	Inclinação, $x = 0$ . . . . .	90
A.2.4.2	Inclinação, $x = 1$ . . . . .	91
A.2.5	Variável $T_{2/3}$ . . . . .	92
A.2.5.1	Dados utilizados para os gráficos da Seção 4.1.4, variável $T_{2/3}$ . . . . .	99
A.2.6	Variável $x_{max}$ . . . . .	104
A.2.7	Variável $T_{max}$ . . . . .	109
<b>A.3</b>	<b>RESULTADOS DA MALHA B . . . . .</b>	<b>114</b>

A.3.1	Variável $T_{P_i}$ . . . . .	115
A.3.2	Temperatura média . . . . .	122
A.3.3	Inclinação $\left(\frac{dT}{dx}\right)\bigg _x$ . . . . .	123
A.3.3.1	Inclinação, $x = 0$ . . . . .	123
A.3.3.2	Inclinação, $x = 1$ . . . . .	124
A.3.4	Variável $T_{2/3}$ . . . . .	125
A.3.5	Variável $x_{max}$ . . . . .	130
A.3.6	Variável $T_{max}$ . . . . .	135
	<b>APÊNDICE B – INTERPOLAÇÕES . . . . .</b>	<b>140</b>
<b>B.1</b>	<b>OBTENÇÃO NUMÉRICA DAS INTERPOLAÇÕES . . . . .</b>	<b>140</b>
B.1.1	Erro de Interpolação . . . . .	142
<b>B.2</b>	<b>OBTENÇÃO NUMÉRICA DAS VARIÁVEIS TIPO III E V . . . . .</b>	<b>149</b>
B.2.1	$T_{2/3}$ . . . . .	149
B.2.2	$x_{max}$ e $T_{max}$ . . . . .	149

# 1 INTRODUÇÃO

Segundo Marchi (2001) a simulação numérica de problemas de engenharia ocupa atualmente uma posição de destaque no cenário mundial de pesquisa e desenvolvimento de novas tecnologias. Com o crescente interesse, não somente acadêmico mas também no setor industrial, pela modelagem de fenômenos físicos, vinculado ao crescimento exponencial da tecnologia, resultou nas últimas décadas uma grande procura pelas técnicas de simulação. Portanto, constatou-se a necessidade contínua de aprimorar estas simulações.

Existem três métodos que podem ser empregados na solução de um problema de engenharia: experimentais, analíticos e numéricos. Marchi (2001) apresenta o diagrama (Figura 1) que exemplifica o sistema de funcionamento destes três métodos.

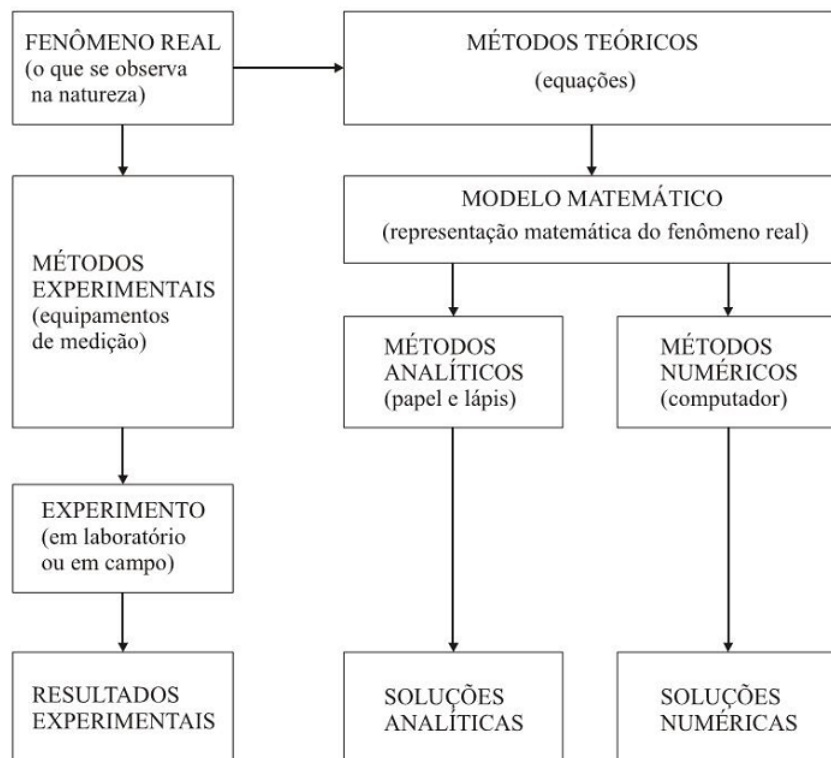


Figura 1 – Métodos de solução de problemas de engenharia (MARCHI, 2001).

Cada método apresenta suas vantagens e desvantagens sobre os demais, dependendo do problema e dos recursos disponíveis para resolvê-lo. Dentro deste contexto, surgiu a área de Dinâmica dos Fluidos Computacional (em inglês, *Computational Fluid Dynamics* (CFD)). Segundo Fortuna (2000), **CFD** consiste basicamente na aplicação de métodos numéricos para resolver equações que representam problemas envolvendo fluidos em

movimento, com ou sem troca de calor, onde o interesse principal é obter as distribuições de velocidade, pressão e temperatura e região de escoamento.

Atualmente, as demandas em CFD requerem o uso de métodos que forneçam soluções numéricas cada vez mais acuradas. Para atingir este objetivo, é necessário controlar o erro numérico ( $E$ ), definido como a diferença entre a solução analítica exata ( $\Phi$ ) de uma variável de interesse, e a solução numérica ( $\phi$ ), definido por:

$$E(\phi) = \Phi - \phi. \quad (1.1)$$

Muitas vezes, a solução  $\Phi$  é difícil de ser encontrada. Neste caso, pode-se aproximá-la, com métodos de aproximação, obtendo uma solução analítica “quase” exata ( $\Phi_\infty$ ). Esta discussão, pode ser vista em Boyce e Diprima (2002). Neste trabalho, utiliza-se modelos matemáticos que possuem solução  $\Phi$ . Deste modo, os desenvolvimentos e conclusões ficam asseguradas, porque estão baseados nos valores exatos do erro numérico.

O erro numérico ( $E$ ) é causado por quatro fontes (MARCHI, 2001; SCHNEIDER, 2007; MARTINS, 2013), são elas: **erro de truncamento** ( $\varepsilon_T$ ), **erro de iteração** ( $\varepsilon_n$ ), **erro de arredondamento** ( $\varepsilon_p$ ) e **erro de programação** ( $\varepsilon_\pi$ ); simbolicamente

$$E(\phi) = E(\varepsilon_T, \varepsilon_n, \varepsilon_\pi, \varepsilon_p). \quad (1.2)$$

Quando  $\varepsilon_n$ ,  $\varepsilon_p$  e  $\varepsilon_\pi$  são minimizadas ou até mesmo inexistentes, o erro de truncamento ( $\varepsilon_T$ ) passa a ser o principal causador do erro numérico. Neste caso,  $\varepsilon_T$  passa a ser denominado erro de discretização ( $Eh$ ). Agora, busca-se alternativas para diminuir  $Eh$ . Segundo Martins (2013), existem três formas de resolver este problema:

- **Refinamento da malha;**
- **Métodos de alta ordem;**
- **Técnicas de extrapolação.**

Cada método tem suas vantagens e desvantagens, com relação aos outros. Neste trabalho emprega-se técnicas de extrapolação. Dentro destas, a extrapolação de Richardson (ER) é uma das mais conhecidas.

Quando utiliza-se ER de forma recursiva, isto é, em que cada aplicação representa um nível de extrapolação, este processo é chamado de Multiextrapolação de Richardson (MER) ou em inglês *Repeated Richardson Extrapolation* (RRE).

No presente trabalho, utiliza-se MER em problemas unidimensionais, com malhas não uniformes, para redução de  $Eh$ . Esta proposta consiste basicamente, em uma extensão do estudo realizado por Martins (2013), que obteve promissores resultados, em malhas uniformes uni e bidimensionais.

## 1.1 DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA

Segundo Martins (2013) na literatura vigente em CFD, não é comum se encontrar o emprego de MER com vários níveis de extrapolação. Isto ocorre, possivelmente, pelas dificuldades para obter resultados significativos em determinados tipos de variáveis.

Umas das contribuições do trabalho de Martins (2013) foi propor uma metodologia para o emprego de MER, em que se classifica as variáveis de interesse em cinco tipos de acordo com as suas localizações em malhas distintas, estabelecendo formas de obter a variável de interesse em cada caso, para em seguida aplicar MER. Na literatura, antes deste trabalho, Martins (2013) relata que o emprego de MER é abordado com sucesso apenas em variáveis globais ou que possuem localização fixa em malhas distintas (primeiro tipo). Para os demais casos MER não é empregada ou é considerada como de baixo desempenho.

Nos estudos realizados, para obtenção dessa metodologia, Martins (2013) utilizou os seguintes problemas-modelo: equação de Poisson, Advecção-Difusão e Burgers. A discretização das equações foi realizada utilizando o Método de Diferenças Finitas (FORTUNA, 2000) ou o Método de Volumes Finitos (MALISKA, 2004), para malhas uniformes. Com o emprego dessa nova metodologia, Martins (2013) obteve resultados significativos na redução do erro de discretização ( $Eh$ ), utilizando MER.

No presente trabalho, procura-se estender o trabalho de Martins (2013), utilizando malhas não uniformes. O problema modelo utilizado aqui trata de um caso unidimensional, originado da equação de Poisson, para discretização do modelo utiliza-se o Método de Diferenças Finitas para malhas não uniformes, com o estudo de diversas variáveis de interesse.

Considera-se três tipos de variáveis das cinco apresentadas por Martins (2013). Na Figura 2, é apresentado o desempenho de MER (Figura 2a), aplicado na variável de tipo I e a influência de MER na ordem de acurácia do método numérico empregado, para obtenção da variável de interesse (Figura 2b), utiliza-se regularmente no desenvolvimento do trabalho as notações: ( $h$ ) média necessária entre os pontos (nós), para discretização do modelo matemático com o Método de Diferenças Finitas, ( $pEh$ ) ordem de acurácia sem MER, ( $pEm$ ) ordem de acurácia com MER, ( $Eh$ ) erro de discretização sem MER e ( $Em$ ) erro de discretização com MER.

O comportamento de  $Em$  (Figura 2a) e  $pEm$  (Figura 2b) é o esperado, isto é, a magnitude de  $Em$  é significativamente menor que  $Eh$ , conforme o valor de  $h$  diminui,  $Em$  tem comportamento decrescente até atingir o erro de máquina, depois passa ter um comportamento oscilatório. De forma inversa,  $pEm$  tem comportamento crescente até atingir o erro de máquina, depois passa a ter comportamento oscilatório. Observe que é obtido um erro de discretização com magnitude inferior a  $10^{-20}$ . Tal nível de acurácia só é obtido com o emprego de MER (no computador utilizado).

O presente trabalho visa analisar o desempenho de MER em variáveis calculadas em malhas não uniformes, utilizando a metodologia proposta por Martins (2013), com o objetivo principal de contribuir com a superação das dificuldades do emprego de MER em CFD, e consequentemente estender o trabalho de Martins (2013).

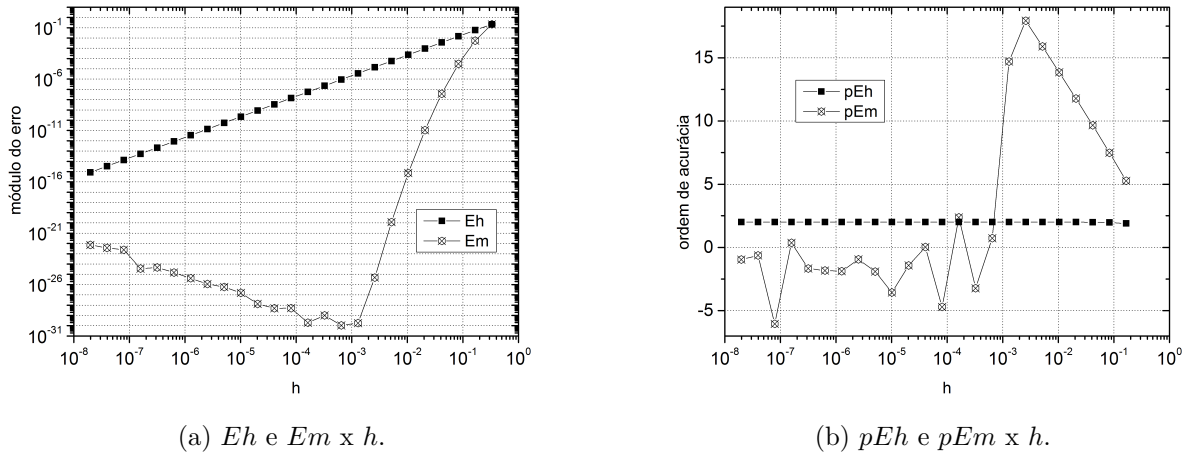


Figura 2 – Desempenho de MER na variável do tipo I, em malha não uniforme.

## 1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O uso de técnicas numéricas para a solução de problemas complexos da engenharia e da física é hoje uma realidade, graças ao vertiginoso desenvolvimento de computadores de alta velocidade e de grande capacidade de armazenamento (MALISKA, 2004).

Segundo Fortuna (2000) o objetivo básico de CFD é reduzir o número de experimentos e explorar fenômenos que não podem ser estudados em laboratório de forma prática. Deste modo, utilizando técnicas de CFD, pode-se avaliar numericamente os diversos parâmetros relevantes ao problema, podendo ser facilmente alterados até que o resultado da simulação atenda às exigências do projeto. Tudo isso de forma bem mais adequada e a custos e tempos menores do que apenas utilizando técnicas experimentais e análises teóricas, combinadas com o projeto inicial, ensaios e reprojeto.

Para Marchi (2001), Schneider (2007), Martins (2013) entre outros autores, a credibilidade de uma simulação numérica em CFD está condicionada a um emprego de rigorosos processos de **Verificação e Validação numérica** (V & V). Usualmente as palavras “Verificação” e “Validação” são tratadas como sinônimos, porém, no âmbito da engenharia atual, elas tem significados distintos. **Verificação** é um processo puramente matemático, que tem como ocupação avaliar o quão bem o método numérico resolve um modelo matemático - avalia a resolução numérica de equações. **Validação**, por sua

vez, trata da adequação do modelo matemático em reproduzir a realidade - avalia se as equações descrevem corretamente o fenômeno físico estudado (ROY, 2005).

A etapa de verificação não leva em conta o grau de fidelidade entre o modelo matemático e o fenômeno físico real. Ela somente busca determinar se o modelo do fenômeno, sua representação matemática e o programa de computador que implementa esse modelo, são consistentes entre si. A verificação tem objetivo de *estimar a confiabilidade* do processo de resolução do problema (FORTUNA, 2000).

Já a validação fornece evidências de que o modelo sendo utilizado é representativo do fenômeno físico, ou seja, que o *problema correto está sendo resolvido*. O processo de verificação é a primeira etapa na avaliação de um código. Apesar de ser complexo, é mais simples do que a validação, já que esta deve analisar o grau de fidelidade com o qual o modelo representa as condições do mundo real (FORTUNA, 2000).

V & V é uma das áreas de estudo em CFD, que devido à imensa importância de dar credibilidade as simulações realizadas, vem rendendo muitos trabalhos científicos nos últimos anos: Marchi (2001), Oberkampf e Timothy (2002), Araki (2007), Schneider (2007) e Alves (2010), são exemplos, nos últimos 15 anos.

Considerando o desenvolvimento do presente trabalho, utiliza-se principalmente recomendações feitas por Marchi (2001) e Schneider (2007) na parte de verificação. Para isso, dois métodos estão à disposição: estimativas de erro a priori e estimativas de erro a posteriori. As estimativas de erro a priori são usadas para estimar a ordem do erro de discretização. Isso é feito estimando-se o erro de truncamento do modelo matemático do problema através da série de Taylor. As estimativas de erro a posteriori são usadas para estimar efetivamente a magnitude do erro de discretização (MARCHI, 2001). Estes são os dois requisitos fundamentais, e de extrema importância, para a verificação em processos de validação. Verificada a confiança do código, a acurácia das soluções numéricas deve ser investigada (ROY; BLOTTNER, 2006).

Com objetivo de melhorar a acurácia da solução numérica e consequentemente o seu erro de discretização ( $Er$ ), segundo Martins (2013) as alternativas para corrigir o problema são: refinamento da malha, cuja desvantagem é o aumento de memória e tempo computacionais; emprego de métodos de alta ordem, cuja desvantagem é o aumento da complexidade do modelo numérico e por último, mas não menos importante, a utilização de técnicas de extrapolação, dentre as quais a **Extrapolação de Richardson** é uma das mais conhecidas.

A técnica denominada extrapolação de Richardson (ER) (em inglês, *Richardson Extrapolation* - **RE**) e sua versão aprimorada a Multiextrapolação de Richardson (MER), tiveram início com Richardson (1910) e Richardson e Gaunt (1927). Segundo Martins (2013) ER foi concebida com o objetivo de aperfeiçoar as aproximações numéricas (aumentar

sua ordem de acurácia) envolvidas na resolução de equações diferenciais pelo método de Diferenças Finitas. As necessidades da época, em engenharia, demandavam métodos rápidos, fáceis de serem entendidos e aplicáveis às equações estudadas. Richardson e Gaunt (1927) já consideraram a aplicação de ER de maneira repetida (MER), com dois níveis de extrapolação.

Ainda hoje, a busca por métodos numéricos de alta ordem de acurácia, para resolução de equações diferenciais parciais (EDP), é um tema de pesquisa ativo, para qual a eficiência computacional é a questão principal (MARTINS, 2013).

Para usar MER é necessário contar com a solução numérica da variável de interesse em três ou mais malhas distintas. MER pode ser usado de duas formas: a primeira, para obter o mesmo erro de discretização com uma malha que tem muito menos nós, resultando na redução do esforço computacional (memória e tempo de CPU); e a segunda, para reduzir o erro de discretização em uma malha com o mesmo número de nós, resultando em erro muito menor e maior confiabilidade da solução (MARCHI; GERMER, 2009).

A vantagem do uso de MER se dá pelo fato de ser um pós-processamento simples, pois não interfere diretamente na obtenção da solução. Seu custo computacional é muito baixo em termos de memória e tempo de CPU. Pode ser aplicada a códigos computacionais já existentes ou a resultados já obtidos. Aplica-se a diversas aproximações numéricas e variáveis de interesse. Independe de análises a priori e conhecimento da solução analítica do problema (VARGAS, 2013).

Desde o surgimento de ER e MER com Richardson (1910) e Richardson e Gaunt (1927), esses métodos tem sido analisados, aprimorados ou simplesmente utilizados para redução de  $Eh$ , por diversos autores: Munyakazi e Patidar (2008), Marchi e Germer (2009), Alves (2010), Chang et al. (2012), Amat et al. (2012), Vargas (2013), Martins (2013), Marchi e Giacomini (2014), são exemplos de trabalhos nos últimos anos. As análises e aprimoramentos (contribuições) encontradas nesta revisão bibliográfica em CFD, foram realizadas com técnicas de discretização em diferenças finitas ou volumes finitos. Porém não foram encontrados trabalhos que analisam o desempenho de MER em **malhas não uniformes**.

Segundo Schneider (2007), uma tendência em CFD é o emprego de malhas não estruturadas para a discretização de domínios arbitrários, esta cada vez mais comum em problemas de engenharia. A discretização de domínios irregulares em uma malha única e de qualidade sempre representou uma dificuldade no uso de métodos numéricos, principalmente quando um refinamento local se faz necessário (SCHNEIDER, 2007).

A Figura 3 contém exemplos de malhas não uniformes, comparadas com uma uniforme, retiradas do trabalho Schneider (2007), para casos gerais, empregadas em CFD. Essas malhas são: estruturadas, uniformes, não uniformes e não estruturadas. Define-se



como uma malha não uniforme, aquela em que os tamanhos dos elementos que a compõem variam aleatoriamente ou que a distância entre os elementos seja não uniforme, e ainda, define-se como uma malha não estruturada, aquela em que não existe uma lei de formação entre os elementos que compõem a malha (SCHNEIDER, 2007).

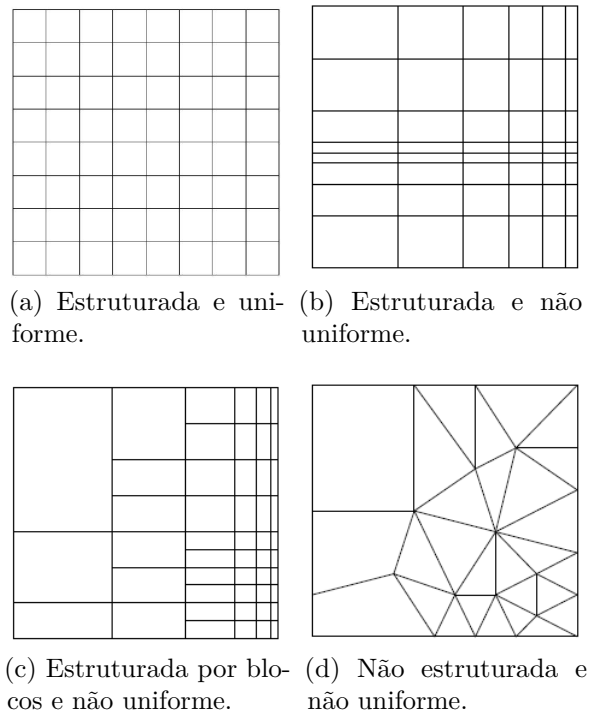


Figura 3 – Exemplos de malhas (SCHNEIDER, 2007).

Para um domínio regular, não se justifica o emprego de malhas não estruturadas, sob pena de aumento considerável da capacidade computacional requerida para obtenção da solução numérica. Antes de se empregar diretamente uma malha não estruturada, é necessário verificar se o problema não pode ser bem resolvido empregando-se uma malha regular. Assim, as malhas estruturadas e uniformes, como na Figura 3a, devem ter preferência sobre as malhas não uniformes e/ou não estruturadas, representadas nas Figuras 3b, 3c e 3d, pois, para um mesmo método numérico, os algoritmos empregados no primeiro caso consomem menos recursos computacionais (SCHNEIDER, 2007).

De modo geral, foram encontrados resultados significativos com o emprego de MER na literatura, servindo de motivação para a realização deste trabalho.

### 1.3 OBJETIVOS

O objetivo geral deste trabalho é contribuir com a superação de dificuldades do emprego de MER em CFD (MARTINS, 2013). Especialmente para variáveis não globais e

que não possuem localização fixa, conforme relatado na Seção 1.1, são as variáveis que MER pode apresentar baixo desempenho.

Pode-se estabelecer como **objetivos específicos**:

- Investigar o desempenho de MER em malhas não uniformes;
- Estabelecer conceitos sobre o tema;
- Estender os resultados promissores obtidos por Martins (2013).

## 1.4 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

A continuidade do texto consiste da seguinte forma: no Capítulo 2 são apresentados conceitos fundamentais para o desenvolvimento do trabalho, como erro numérico, interpolação polinomial, método de diferenças finitas, entre outros; no Capítulo 3 é apresentada a metodologia empregada para aplicação de MER; no Capítulo 4 são apresentados os resultados do trabalho e no Capítulo 5 são tratadas as conclusões, contribuições e as sugestões de trabalhos futuros.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, são tratados alguns fundamentos importantes que constituem a base teórica do presente trabalho.

### 2.1 PROBLEMA MODELO

O modelo matemático a ser trabalhado é o caso do fenômeno físico de difusão unidimensional com geração de calor, sendo modelado pela equação de Poisson 1D:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = S; \quad x \in \Omega[0, L], \quad (2.1)$$

em que a coordenada  $T$  representa a temperatura (dependente),  $x$  é uma coordenada espacial (independente),  $L$  é o comprimento do intervalo  $\Omega[0, L]$  e por fim  $S$  é o termo fonte. Utiliza-se as condições de contorno de Dirichlet:

$$T(0) = T_0, \quad T(L) = T_L, \quad T_0, T_L \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Para resolver este modelo matemático, utiliza-se o método de Diferenças Finitas, que será brevemente apresentado na próxima seção.

### 2.2 MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS (MDF)

Segundo Maliska (2004) a tarefa de um método numérico é resolver uma ou mais equações diferenciais, substituindo as derivadas existentes por expressões algébricas que envolvem a função incógnita. Quando não é possível a solução analítica, e decide-se fazer uma aproximação numérica da equação diferencial, em que aceita-se ter a solução para um número discreto de pontos, com um determinado erro, esperando que, quanto maior for esse número de pontos, mais perto da solução exata será a solução aproximada (ou numérica).

O método numérico utilizado neste trabalho, para obtenção das soluções numéricas, chama-se Método de Diferenças Finitas (MDF). Seu princípio básico consiste em aproximar através de expressões algébricas cada termo do modelo matemático em cada nó da malha discretizada.

A discretização é feita em um domínio unidimensional, com espaçamentos não uniformes, conforme mostra a Figura 4, considerando o nó  $j$  (ou ponto  $j$ ), com coordenada  $x_j$ . As aproximações são feitas utilizando os nós vizinhos de  $j$ . As constantes  $h_{j-1}$ ,  $h_j$ ,  $h_{j+1}$  e  $h_{j+2}$  são os espaçamentos entre os nós.

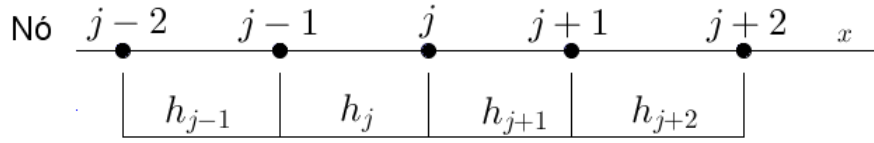


Figura 4 – Malha unidimensional não uniforme.

Para aproximar as derivadas avaliadas no nó (ou ponto)  $j$ , que envolvem a variável dependente  $T$  e independente  $x$ , utiliza-se aproximações em série de Taylor (BOYCE; DIPRIMA, 2002), para a incógnita  $T$  em torno do nó  $j$ , para os nós vizinhos  $j-2$ ,  $j-1$ ,  $j+1$  e  $j+2$ , utiliza-se a notação  $T_j = T(x_j)$ .

Essas aproximações geram um erro de truncamento (Seção 2.5.1), nas próximas seções são apresentadas as aproximações utilizadas com seu erro de truncamento e suas ordens verdadeiras em MDF, obtidas com a estimativa do erro a priori.

Considera-se a aproximação do tipo CDS (*Central Differencing Scheme*) para aproximar a derivada de segunda ordem, para discretização do problema modelo (Seção 2.1). Após a discretização, obtém-se um sistema linear

$$Ax = b, \quad (2.3)$$

tridiagonal (FORTUNA, 2000). Para resolver a equação acima, utiliza-se um método direto muito difundido na literatura com a finalidade de obter a solução de um sistema linear tridiagonal, chamado TriDiagonal Matrix Algorithm (TDMA) (MALISKA, 2004; FORTUNA, 2000). Este é um dos métodos mais adequados para resolução deste sistema tridiagonal, originado com o processo de discretização.

Após obter a solução numérica do modelo matemático, calcula-se a inclinação da temperatura  $\left(\frac{dT}{dx}\right)_x$  e a temperatura média ( $T_m$ ) definida pela equação (MARCHI, 2001):

$$T_m = \frac{1}{L} \int_0^L T dx, \quad (2.4)$$

onde  $L$  é comprimento do domínio de cálculo sobre o qual se realiza a média da variável dependente  $T$  e  $x$  é a variável independente.

A seguir é apresentado um breve resumo das aproximações utilizadas no trabalho em MDF. As deduções das equações apresentadas e para mais detalhes sobre o método, recomenda-se a leitura do trabalho de Marchi (2001).

### 2.2.1 Aproximação DDS-2 e UDS-2

Para aproximar a derivada de primeira ordem, avaliada no nó  $j \left(\frac{dT}{dx}\right)_j$ , uma forma de realizar esta aproximação é através de uma aproximação do tipo DDS (Downstream

Differencing Scheme), com dois pontos a jusante ( $T_{\text{DDS}-2}^i$ ), em diferenças finitas, para malhas não uniformes, representada pela equação (MARCHI, 2001):

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_j \approx (T_{\text{DDS}-2}^i)_j = \frac{[(1+r_j)^2 T_{j+1} - (2+r_j)r_j T_j - T_{j+2}]}{r_j(1+r_j)h_{j+1}}, \quad (2.5)$$

cujo erro de truncamento é dado por

$$\varepsilon(T_{\text{DDS}-2}^i)_j = T_j^{iii} \frac{(1+r_j)}{6} h_{j+1}^2 + T_j^{iv} \frac{(1+r_j)(2+r_j)}{24} h_{j+1}^3 + \dots, \quad (2.6)$$

onde

$$r_j = \frac{h_{j+2}}{h_{j+1}}. \quad (2.7)$$

Portanto, as ordens verdadeiras são:  $p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 4, \dots$ , etc.

Outra forma de aproximar a derivada de primeira ordem é através de uma aproximação do tipo UDS (Upwind Differencing Scheme), com dois pontos a montante ( $T_{\text{UDS}-2}^i$ ), em diferenças finitas, para malhas não uniformes, representada pela equação:

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_j \approx (T_{\text{UDS}-2}^i)_j = \frac{[-(1+r_j)^2 T_{j-1} + (2+r_j)r_j T_j + T_{j-2}]}{r_j(1+r_j)h_j}, \quad (2.8)$$

cujo erro de truncamento é dado por

$$\varepsilon(T_{\text{UDS}-2}^i)_j = T_j^{iii} \frac{(1+r_j)}{6} h_j^2 - T_j^{iv} \frac{(1+r_j)(2+r_j)}{24} h_j^3 + \dots, \quad (2.9)$$

onde

$$r_j = \frac{h_{j-1}}{h_j}. \quad (2.10)$$

Portanto, as ordens verdadeiras são:  $p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 4, \dots$ , etc.

### 2.2.2 Aproximação CDS

Para aproximar a derivada de segunda ordem, avaliada no nó  $j$  ( $\frac{d^2 T}{dx^2}$ ), utiliza-se a aproximação do tipo CDS (*Central Difference Scheme*) ( $T_{\text{CDS}}^{ii}$ ), em diferenças finitas, para malhas não uniformes, representada pela equação (MARCHI, 2001):

$$\left(\frac{d^2 T}{dx^2}\right)_j \approx (T_{\text{CDS}}^{ii})_j = 2 \frac{[h_{j+1} T_{j-1} + h_j T_{j+1} - (h_j + h_{j+1}) T_j]}{(h_j + h_{j+1}) h_j h_{j+1}} \quad (2.11)$$

cujo erro de truncamento é dado por

$$\varepsilon(T_{\text{CDS}}^{ii})_j = \frac{T_j^{iii}}{3} (h_j - h_{j+1}) - \frac{T_j^{iv}}{12} \frac{(h_j^3 + h_{j+1}^3)}{(h_j + h_{j+1})} + \dots \quad (2.12)$$

Portanto, as ordens verdadeiras são:  $p_0 = 1, p_1 = 2, p_2 = 3, \dots$ , etc.

### 2.2.3 Temperatura média

Para calcular a temperatura média ( $T_m$ ) (Eq. 2.4), utiliza-se a regra do Trapézio (FRANCO, 2007), para malhas não uniformes, cuja aproximação e erro de truncamento, são representadas pelas equações, respectivamente (MARCHI, 2001):

$$T_m = \frac{1}{L} \int_0^L T dx \approx \frac{1}{2L} \sum_{j=1}^N h_j (T_{j-1} + T_j) \quad (2.13)$$

$$\varepsilon(T_m) = -\frac{1}{L} \sum_{j=1}^N \left( T_{j-1/2}^{ii} \frac{h_j^3}{12} + T_{j-1/2}^{iv} \frac{h_j^5}{480} + \dots \right) \quad (2.14)$$

onde  $L$  é o comprimento do intervalo e  $N$  o número de nós. Embora as ordens verdadeiras sejam  $p_0 = 3, p_1 = 5, p_2 = 7, \dots$ , etc, observando os termos do erro de truncamento  $\varepsilon(T_m)$ , Marchi (2001) demonstra que as ordens verdadeiras são:  $p_0 = 2, p_1 = 4, p_2 = 6, \dots$ , etc.

### 2.2.4 MDF, caso uniforme

Mas adiante com o desenvolvimento do trabalho, se faz necessário o conhecimento das ordens verdadeiras nas aproximações utilizadas, no caso em que os espaçamentos ( $h$ ) entre os nós é uniforme. Para obter estas aproximações, basta considerar

$$h = h_{j+1} = h_{j+2} = h_j = h_{j-1} \quad (2.15)$$

nas equações que representam as aproximações  $T_{\text{DDS}-2}^{(i)}$ ,  $T_{\text{UDS}-2}^{(i)}$ ,  $T_{\text{CDS}}^{(ii)}$ ,  $T_m$  e nos seus respectivos erros de truncamento. Deste modo, obtêm-se as aproximações a priori, para o caso uniforme e consequentemente as novas ordens verdadeiras de cada aproximação.

Na Tabela 1, é apresentado um quadro comparativo entre as ordens verdadeiras obtidas a priori, para cada caso. A única que apresenta diferença é a aproximação  $T_{\text{CDS}}^{(ii)}$ . Porém, como ela é aplicada na discretização do problema modelo, este resultado é importante, para análises feitas após a obtenção das soluções numéricas.

Tabela 1 – Ordens verdadeiras das aproximações em diferenças finitas, obtidas a priori.

Aproximação	Ordens verdadeiras	
	malha não uniforme	malha uniforme
$T_{\text{DDS}-2}^{(i)}$ e $T_{\text{UDS}-2}^{(i)}$	2,3,4,...	2,3,4,..
$T_{\text{CDS}}^{(ii)}$	1,2,3,..	2,4,6,..
$T_m$	2,4,6,..	2,4,6,..

## 2.3 INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

Com a resolução de um modelo matemático através do emprego de um método numérico são obtidos valores para  $\phi$  em pontos nodais determinados pela malha adotada.

Entretanto, em alguns casos, pode ocorrer a necessidade de se obter  $\phi$  em locais específicos que não coincidem com os pontos dessa malha. Nessa situação, o emprego de interpolação polinomial representa uma ferramenta que pode ser empregada com sucesso (MARTINS, 2013).

Segundo Franco (2007) a aproximação de funções por polinômios é uma das ideias mais antigas da análise numérica, e até hoje é umas das técnicas mais usadas na área. Isso se deve, pelo fato dos polinômios serem facilmente computáveis, integrais e derivadas de fácil obtenção e por fim suas raízes podem ser obtidas, quando possível, de forma razoavelmente simples.

Nas próximas seções, são apresentadas formas para aproximar uma função  $f(x)$ , por interpolação polinomial, através dos métodos de **Diferenças Divididas** de Newton e **Lagrange**, sendo estes dois métodos bastantes utilizados na literatura.

### 2.3.1 Polinômio de Interpolação

Segundo Franco (2007) o problema geral da interpolação por meio de polinômios consiste em dados  $n + 1$  pontos distintos (reais ou complexos)  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  e  $n + 1$  números (reais ou complexos)  $y_0, y_1, \dots, y_n$ , números estes que em geral são  $n + 1$  valores de uma função  $y = f(x)$  em  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . O objetivo é determinar um polinômio  $\varphi_n(x)$  de grau no máximo  $n$ , tal que:

$$\varphi_n(x_0) = y_0; \quad \varphi_n(x_1) = y_1; \quad \dots \quad \varphi_n(x_n) = y_n. \quad (2.16)$$

Este polinômio existe, sendo único, desde que satisfaça as condições do teorema a seguir:

**Teorema 2.3.1** *Dados  $n + 1$  pontos distintos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  (reais ou complexos) e  $n + 1$  valores  $y_0, y_1, \dots, y_n$ , existe um e só um polinômio  $\varphi_n(x)$ , de grau menor ou igual a  $n$ , tal que*

$$\varphi_n(x_k) = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (2.17)$$

A demonstração deste importante teorema pode ser vista em Franco (2007). Ele refere-se que independentemente do método utilizado para obter o polinômio ( $\varphi_n$ ) da equação (2.17), obtém-se o mesmo resultado. A seguir é apresentado duas formas de obter  $\varphi_n$ , através dos métodos de **Diferenças Divididas** de Newton e **Lagrange**.

### 2.3.2 Diferença dividida de Newton

Para obter a polinômio  $\varphi_n$ , para  $n + 1$  pontos distintos, pelo método de diferença dividida de Newton, defini-se as funções:

$$\begin{cases} (1) & f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\ (2) & f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \\ \vdots & \\ (n) & f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \end{cases} \quad (2.18)$$

Utilizando a tabela acima, obtém-se o polinômio ( $\varphi_n$ ) de Newton de grau menor ou igual a  $n$ , representado pela equação:

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0) \cdot (x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \\ \dots + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \dots, x_n]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

### 2.3.3 Fórmula de Lagrange

Para obter  $\varphi_n$  de grau menor ou igual a  $n$ , para  $n + 1$  pontos distintos, o polinômio de Lagrange é determinado por:

$$\varphi_n(x) = f(x_0)l_{(n,0)}(x) + f(x_1)l_{(n,1)}(x) + \dots + f(x_n)l_{(n,n)}(x) \quad (2.20)$$

onde

$$l_{(n,k)} = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}. \quad (2.21)$$

### 2.3.4 Erro na Interpolação

Como visto anteriormente, o polinômio de interpolação ( $\varphi_n$ ), para uma função  $y = f(x)$ , tem a propriedade

$$\varphi_n(x_k) = y_k \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (2.22)$$

Nos pontos  $\bar{x} \neq x_k$ , nem sempre é verdade que  $\varphi_n(\bar{x}) = f(\bar{x})$ . Por outro lado, nos pontos  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , considera-se  $\varphi_n(x)$  uma aproximação exata de  $y = f(x)$ , avaliada nestes pontos em um certo intervalo  $[a, b]$  que contenha os pontos  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . O erro ( $\xi_n$ ) que se comete ao realizar essa interpolação, pode ser representado por

$$\xi_n(x) = f(x) - \varphi_n(x) \quad \forall x \in [a, b]. \quad (2.23)$$

No presente trabalho, realizou-se testes com os métodos de **Lagrange** e **Diferenças Divididas** de Newton, com polinômios com graus (ou ordens) de 1 até 10. Nos testes realizados, constatou-se que o método de **Diferenças Divididas** de Newton obteve os



melhores resultados, conforme é diminuído o espaçamento ( $h$ ), entre os pontos escolhidos para interpolação. Os testes realizados estão devidamente detalhados no apêndice B. Nos experimentos realizados por Martins (2013), também foi constatado a superioridade do método de Diferenças Divididas de Newton sobre o método de Lagrange com malhas uniformes.

Para mais detalhes sobre o estudo do erro de interpolação, assim como a teoria de interpolação polinomial, recomenda-se a obra de Steffensen (1950).

## 2.4 MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO

Pode ocorrer a necessidade de se avaliar determinada variável de interesse em localização não nodal. Neste caso, o emprego de interpolação polinomial, para obtenção da variável não nodal é recomendada. Entretanto, pode ser necessária ainda a obtenção de um ponto extremo (ponto máximo ou de mínimo). Como exemplo: a obtenção da velocidade máxima ou da pressão máxima ou da pressão mínima (MARTINS, 2013). Se tal ponto procurado pertence à região do domínio de cálculo na qual a interpolação esta definida, surge a necessidade do emprego de métodos de otimização.

Neste trabalho utilizou-se o método do gradiente (RIBEIRO; KARAS, 2013), que é uma técnica de otimização irrestrita. Porém, para o caso unidimensional, este método pode ser realizado através do método de Newton (FRANCO, 2007; RIBEIRO; KARAS, 2013), também conhecido por método da Tangente.

No presente trabalho, busca-se apenas encontrar o ponto de máximo (Seção 3.3). No apêndice B, é apresentado a metodologia utilizada para obtenção desta variável, combinando o método do Gradiente com o método de Newton.

## 2.5 ERRO NUMÉRICO

Pode-se definir como erro numérico ( $E$ ), a diferença entre a solução analítica exata ( $\Phi$ ) de uma variável de interesse, e a solução numérica ( $\phi$ ) (MARCHI, 2001):

$$E(\phi) = \Phi - \phi. \quad (2.24)$$

Segundo Marchi (2001), Schneider (2007), Martins (2013), Vargas (2013) entre outros, o erro numérico é gerado por quatro fontes principais: erro truncamento ( $\varepsilon_T$ ), erro de iteração ( $\varepsilon_n$ ), erro de arredondamento ( $\varepsilon_\pi$ ) e erro de programação ( $\varepsilon_p$ ). Deste modo, pode-se reescrever a equação (2.24) de forma simbólica:

$$E(\phi) = E(\varepsilon_T, \varepsilon_n, \varepsilon_\pi, \varepsilon_p). \quad (2.25)$$

Conforme é diminuído cada fonte de erro, tornando algumas até inexistentes, a solução numérica ( $\phi$ ) estará cada vez mais acurada. Se conhecida a solução analítica exata ( $\Phi$ ),  $\phi$  neste caso tenderá para  $\Phi$ . A seguir é mostrado um breve resumo destas fontes de erros.

### 2.5.1 Erro de truncamento e ordens verdadeiras

O erro de truncamento ( $\varepsilon_T$ ) de uma equação diferencial é o resíduo, resultante da substituição da solução analítica exata de uma variável dependente ( $T$ ) na equação discretizada do modelo matemático (MARCHI, 2001; SCHNEIDER, 2007).

Considerando uma aproximação numérica qualquer, admitindo-se inicialmente um espaçamento uniforme ( $h$ ) entre os nós da malha, pode-se representar a equação geral do erro de truncamento pela equação (MARCHI, 2001):

$$\varepsilon_T = c_1 h^{p_0} + c_2 h^{p_1} + c_3 h^{p_2} + \dots \quad (2.26)$$

em que os coeficientes  $c_i$  são constantes, não necessariamente positivas. Por definição as ordens verdadeiras são os expoentes de  $h$  dos termos não nulos da equação (2.26), sendo números inteiros positivos, que seguem a relação  $1 \leq p_0 < p_1 < p_2 < p_3 < \dots$  etc. Esta sequência constitui geralmente uma série aritmética, isto é, a diferença entre ordens subsequentes é constante. Em geral é uma sequência infinita, porque é constituída por uma quantidade infinita de termos. O menor expoente de  $h$  ( $p_0$ ), por definição, é chamado de ordem assintótica ( $p_0$ ). Este inteiro positivo tem a propriedade  $p_0 \geq 1$ .

Quando o tamanho ( $h$ ) dos elementos da malha tende a zero, isto é  $h \rightarrow 0$ , o primeiro termo da equação (2.26) é o principal componente, isto é, ele domina o valor de  $\varepsilon_T$ . Neste caso, em gráficos logarítmicos de  $\varepsilon_T$  versus  $h$ , a inclinação em relação ao eixo das abscissas da curva  $\varepsilon_T$  para  $h \rightarrow 0$  tende ao valor da ordem assintótica (MARCHI, 2001).

A ordem assintótica pode ser obtida através de uma estimativa de erro a priori, sendo muito importante para o desenvolvimento deste trabalho. Isso ficará claro, quando for abordado novamente o tema, e for definido a ordem efetiva do erro de discretização.

### 2.5.2 Erro de iteração

O erro de iteração ( $\varepsilon_n$ ) ocorre quando utiliza-se métodos iterativos para obtenção da solução numérica ( $\phi$ ). Métodos como Gauss-Seidel e Jacobi-Richardson são exemplos de métodos numéricos, utilizados para resolução de sistemas lineares, em que se obtém a solução numérica ( $\phi_n$ ) por iterações. Em geral, quanto maior o número de iterações ( $n$ ), melhor a solução numérica e consequentemente menor o seu erro de iteração ( $\varepsilon_n$ ).

Formalmente é definido o erro de iteração ( $\varepsilon_n$ ), de uma variável de interesse ( $\phi$ ), como a diferença entre a solução exata ( $\Phi$ ) e a solução numérica em um determinada

iteração  $(\phi_n)$ , isto é:

$$\varepsilon_n(\phi) = \Phi - \phi_n, \quad (2.27)$$

e na maioria dos casos vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n = \Phi. \quad (2.28)$$

Na área de CFD, o trabalho de Martins e Marchi (2008) é um exemplo de trabalho que aborda o assunto.

### 2.5.3 Erro de arredondamento

Os erros de arredondamento  $(\varepsilon_\pi)$  são os erros que ocorrem principalmente devido à representação finita dos números reais na computação, ou seja, também são erros de truncamento, porém oriundos da necessidade de se limitar o número de dígitos usados para armazenar os valores das variáveis. Eles dependem do compilador (*software*) usado para gerar o código computacional e do computador (*hardware*) empregado em sua execução (MARCHI, 2001).

Este erro  $(\varepsilon_\pi)$  tende a crescer conforme é diminuído o espaçamento entre os nós da malha discretizada. Fato que pode ser visto no apêndice B, com o estudo do erro de interpolação. Para controlar ao máximo possível este erro, recomenda-se utilizar a precisão máxima de armazenamento, disponível no compilador utilizado.

### 2.5.4 Erro de programação

O erro de programação  $(\varepsilon_p)$  é ocasionado pelo programador na implementação da simulação. Existem vários motivos que levam a esse erro, por exemplo: falta de conhecimento teórico do algoritmo, distração e inexperiência com a linguagem de programação utilizada, etc.

### 2.5.5 Erro de discretização e ordem efetiva

Quando  $\varepsilon_n$ ,  $\varepsilon_p$  e  $\varepsilon_\pi$  são minimizadas ou até mesmo inexistentes, o erro de truncamento  $(\varepsilon_T)$  passa a ser o principal causador do erro numérico. Neste caso,  $\varepsilon_T$  passa a ser denominado erro de discretização  $(Eh)$ . Para que o erro numérico seja gerado apenas pelo erro de discretização, deve-se verificar se (MARCHI, 2001):

- os modelos matemáticos abordados sejam simples o suficiente para evitar os erros de programação;
- a precisão computacional adotada para armazenamento das variáveis seja adequada para minimizar erros de arredondamento;

- no caso de soluções iterativas, o número de iterações seja suficiente para se atingir o erro de máquina ou para reduzir ao máximo os erros de iteração.

Assumindo que as fontes de erros estão controladas, a Eq. (2.26), pode ser reescrita da forma:

$$Eh = c_1 h^{p_0} + c_2 h^{p_1} + c_3 h^{p_2} + \dots \quad (2.29)$$

$$1 \leq p_0 < p_1 < p_2 < p_3 < \dots \quad (2.30)$$

Se conhecida a solução analítica exata ( $\Phi$ ), nesta possibilidade  $Eh$  pode ser calculado pela Eq. (2.24)

$$Eh = E(\phi) = \Phi - \phi \quad (2.31)$$

e pode-se calcular a ordem efetiva ( $p_E$ ), definida como a inclinação local do erro de discretização ( $Eh$ ) da solução numérica ( $\phi$ ) versus o tamanho ( $h$ ) dos elementos da malha em um gráfico bilogarítmico. Seu cálculo permite verificar na prática, isto é, a *posteriori* das soluções numéricas, se  $p_E$  tende à ordem assintótica dos erros de truncamento, ordem esta que é um resultado teórico, obtido a *priori* das soluções numéricas (MARCHI, 2001).

Para obter a ordem efetiva, é necessário ao menos de duas soluções numéricas  $\phi_1$  e  $\phi_2$  obtidas na malha  $\Omega^{h_1}$  (grossa) e  $\Omega^{h_2}$  (fina), respectivamente, em que a relação entre as duas é a razão de refino ( $r$ ):

$$r = \frac{h_1}{h_2} \quad (r > 1). \quad (2.32)$$

As constantes  $h_1$  e  $h_2$  são os espaçamentos uniformes entre os nós das malhas  $\Omega^{h_1}$  e  $\Omega^{h_2}$ , a expressão de  $p_E$  é dada por Marchi (2001):

$$p_E = \frac{\log \left[ \frac{\Phi - \phi_1}{\Phi - \phi_2} \right]}{\log(r)}. \quad (2.33)$$

No caso de malhas não uniformes, se o refino é uniforme, a variável  $r$  também é dada pela equação (2.32), em que as variáveis  $h_1$  e  $h_2$  representam o espaçamento médio necessário entre os nós das malhas  $\Omega^{h_1}$  e  $\Omega^{h_2}$ , neste caso. Existem outras formas de se refinar uma malha não uniforme, como pode ser visto em Marchi (2001) e conseqüentemente  $r$  sofre alteração, neste trabalho utiliza-se somente refino uniforme, esta escolha é justificada mais adiante.

Prosseguindo, quando se utiliza duas soluções  $\phi_1$  e  $\phi_2$  obtidas em duas malhas super finas, para o cálculo da ordem efetiva ( $p_E$ ), isto é com espaçamentos ( $h$ ) bem pequenos, é esperado que  $p_E$  tenda à ordem assintótica ( $p_0$ ), matematicamente falando:

$$\lim_{h \rightarrow 0} p_E = p_0. \quad (2.34)$$

A equação (2.34) nos diz que a ordem efetiva pode ser encarada como a ordem de acurácia do método escolhido, isto é, ele serve para medir a velocidade em que o método converge. Neste sentido, tem-se que a ordem assintótica ( $p_0$ ) seria a ordem de acurácia estimada a priori do método. Em geral a equação (2.34) é satisfeita, quando isto ocorre é um indicativo que a aproximação utilizada esta funcionando adequadamente. Vale ressaltar que esta análise a posteriori só é possível quando o erro numérico está apenas dominado pelo erro de truncamento.

Um exemplo de quando a Eq. (2.34) não é válida esta no trabalho de Marchi (2001), ao se utilizar malhas não uniformes, com refino uniforme. Caso a equação (2.34) não seja satisfeita, primeiramente deve-se verificar se  $Eh$  não esta afetada por algum outro tipo de erro (Ex: Erro de programação). Caso não seja esta opção, deve-se verificar na literatura a ocorrência de casos semelhantes e em seguida investigar, procurando justificativas matemáticas para explicar o ocorrido.

Na Tabela 2, é apresentado a ordem assintótica e ordens verdadeiras de cada método, devido a sua grande importância nas análises a posteriori. Outra utilidade que pode-se citar para obtenção de  $p_0$  a priori, é conseguir prever a eficiência da redução do erro, antes mesmo do processo de implementação.

Tabela 2 – Ordens verdadeiras e assintóticas obtidas a priori em diferenças finitas.

	Aproximações		
	$T_{\text{DDS}-2}^{(i)}$ e $T_{\text{UDS}-2}^{(i)}$	$T_{\text{CDS}}^{(ii)}$	$T_m$
Ordens verdadeiras obtidas com malha não uniforme	2,3,4,..	1,2,3,..	2,4,6,..
Ordens verdadeiras obtidas com malha uniforme	2,3,4,..	2,4,6,..	2,4,6,..
$p_0$ obtida com malha não uniforme	2	1	2
$p_0$ obtida com malha uniforme	2	2	2

Nos experimentos realizados, existe a solução analítica exata, porém se ela não existe, é possível realizar análises semelhantes ao que foi mostrado anteriormente. Para tanto, utiliza-se estimadores do erro discretização, também conhecido na literatura por incerteza ( $U$ ). Através do cálculo da incerteza do erro numérico, pode-se obter a ordem aparente ( $p_U$ ) da incerteza, que basicamente tem a mesma função e utilidade da ordem efetiva ( $p_E$ ). Porém para a obtenção de  $p_U$ , não é necessário ter  $\Phi$ . No desenvolvimento deste trabalho, não trabalhou-se com a incerteza do erro numérico e consequentemente com a ordem aparente. Esta seria uma das propostas de trabalhos futuros. Para mais

detalhes sobre este importante tema de pesquisa em CFD, recomenda-se a leitura dos trabalhos de Marchi (2001), Schneider (2007) e Martins (2013).

## 2.6 EXTRAPOLAÇÃO DE RICHARDSON

Segundo Martins (2013) a metodologia denominada **Extrapolação de Richardson** (ER) é aplicada quando se saiba que a técnica de aproximação utilizada possui um termo indicativo de erro previsível, ou seja, uma forma que dependa de um parâmetro real ( $h$ ).

Para aplicar ER e posteriormente MER, é esperado que o erro numérico seja dominado apenas pelo erro de truncamento. O objetivo de ER e MER é de aumentar a acurácia de soluções já obtidas, através de algum método numérico e consequentemente reduzir o erro de discretização ( $Er$ ), portanto, neste aspecto, pode-se pensar em ER e MER como uma técnica de pós-processamento de dados.

A fim de aplicar ER, é necessário ao menos de duas soluções numéricas  $\phi(h)$  e  $\phi(rh)$ , neste enfoque  $\phi(h)$  e  $\phi(rh)$  correspondem aos valores obtidos nas malhas  $\Omega^h$  (Malha fina) e  $\Omega^{rh}$  (Malha grossa) ( $rh > h$ ), que tem a mesma ordem assintótica  $p_0$ . Lembrando do conceito de ordem verdadeiras (Seção 2.5.1):

$$1 \leq p_0 < p_1 < p_2 < p_3 < \dots,$$

a relação entre estas duas malhas esta na razão de refino ( $r$ ). De Martins (2013), tem-se a expressão de ER para a solução analítica exata ( $\Phi$ ):

$$\Phi = \phi(h) + \frac{\phi(h) - \phi(rh)}{r^{p_0} - 1} + O(h^{p_1}). \quad (2.35)$$

Neste enfoque o símbolo  $O(h^{p_1})$  representa o termo indicativo da ordem do erro, neste caso  $p_1$ , pela definição de ordem de verdadeira  $p_1 > p_0$ , assim a aproximação obtida por ER, tem ordem assintótica mais elevada do que  $\phi(h)$  e  $\phi(rh)$  e, consequentemente, proporcionando a obtenção de um resultado mais acurado. Finalmente, a aproximação obtida por ER ( $\phi_\infty$ ) extrapolada é dada pela expressão (MARTINS, 2013):

$$\phi_\infty = \phi(h) + \frac{\phi(h) - \phi(rh)}{r^{p_0} - 1}. \quad (2.36)$$

Segundo Vargas (2013) a extrapolação de Richardson (ER) é um método simples que contribui para a velocidade de convergência, como também para um resultado mais acurado.

### 2.6.1 Multiextrapolação de Richardson

Aplicando a equação (2.35) de forma recursiva em  $G$  malhas distintas  $\Omega^{h^1}, \Omega^{h^2}, \Omega^{h^3}, \Omega^{h^2}, \dots, \Omega^{h^g}, \dots, \Omega^{h^G}$ , geradas com razão de refino  $r = h^{g-1}/h^g$  ( $g = 2, \dots, G$ ), obtém-se de Martins (2013) a **Multiextrapolação de Richardson**:

$$\phi_{g,m} = \phi_{g,m-1} + \frac{\phi_{g,m-1} - \phi_{g-1,m-1}}{r^{p_{m-1}} - 1}; \quad g = 2, \dots, G; \quad m = 1, \dots, g-1. \quad (2.37)$$

As variáveis  $\phi_{1,0}, \phi_{2,0}, \phi_{3,0}, \dots, \phi_{G,0}$  equivalem às soluções numéricas  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_G$  obtidas nas malhas  $\Omega^{h^1}, \Omega^{h^2}, \Omega^{h^3}, \Omega^{h^2}, \dots, \Omega^{h^g}, \dots, \Omega^{h^G}$ , respectivamente. Conforme visto na seção anterior, a cada extrapolada a ordem de acurácia aumenta em comparação com as ordens de acurácia das duas soluções numéricas utilizadas. Portanto, utilizando MER a convergência do método é acelerada significativamente em cada extrapolação, proporcionando uma solução mais acurada, na Figura 5, tem-se o algoritmo de MER, extraído do trabalho de Martins (2013). A ordem efetiva ou simplesmente ordem de acurácia com MER é dada pela equação (MARTINS, 2013; VARGAS, 2013):

$$(p_E)_{g,m} = \frac{\log \left[ \frac{\Phi - \phi_{g-1,m}}{\Phi - \phi_{g,m}} \right]}{\log(r)}. \quad (2.38)$$

Se conhecida a solução analítica exata, para calcular o erro de discretização com MER ( $Em$ ) em cada extrapolação, basta calcular a diferença da solução analítica exata ( $\Phi$ ) menos a solução extrapolada ( $\phi_{g,m}$ ), isto é:

$$Em = \Phi - \phi_{g,m}. \quad (2.39)$$

Teoricamente, à medida que  $h \rightarrow 0$ , os valores das ordens de acurácia obtidas em cada extrapolação  $(p_E)_{g,m}$  devem tender para as ordens verdadeiras do método empregado, estimadas a priori, do respectivo nível de extrapolação ( $m$ ). Assim a convergência do método empregado é acelerada consideravelmente.

A técnica de MER tem como objetivo reduzir o erro de discretização melhorando a eficiência e a exatidão computacional. Porém, devido a ocorrências de erros de arredondamento nos resultados desse processo, faz-se necessária a redução desses erros de forma a contribuir para o desempenho ideal do método e, conseqüentemente, obter a melhor precisão dos resultados (VARGAS, 2013).

É inevitável, em algum momento o erro de arredondamento aparecerá, mas mesmo neste cenário, MER consegue resultados significativos, como pode ser visto no exemplo apresentado no capítulo 1, na Figura 2. Essa é uma grande motivação para o estudo de metodologias para melhor empregar MER, porque quando MER funciona, obtém-se

resultados relevantes e com custo computacional bem reduzido, o que é muito prezado em CFD.

Para saber mais sobre ER e MER, origens, deduções das fórmulas apresentadas aqui e um aprofundamento mais detalhado da parte teórica dos métodos, recomenda-se a leitura das obras Vargas (2013) e Martins (2013).

Obter soluções numéricas para a variável de interesse  $\phi$  em  $G$  malhas distintas:  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_G$ .

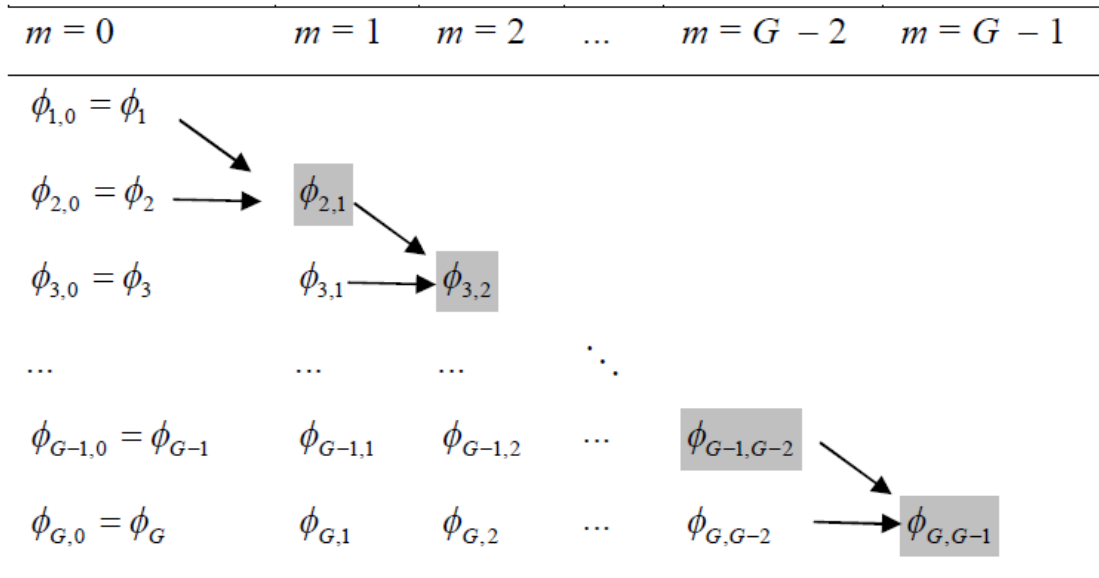
Fazer:  $\phi_{1,0} = \phi_1, \phi_{2,0} = \phi_2, \phi_{2,0} = \phi_2, \dots, \phi_{G,0} = \phi_G$ .

Para  $m = 1, \dots, G-1$

Para  $g = m+1, \dots, G$

$$\phi_{g,m} = \phi_{g,m-1} + \frac{\phi_{g,m-1} - \phi_{g-1,m-1}}{r^{p_{m-1}} - 1}.$$

(a) Algoritmo de MER.



(b) Representação esquemática do emprego de MER.

Figura 5 – Multiextrapolação de Richardson (Algoritmo), adaptado de Martins (2013).



## 2.7 RESUMO DO CAPÍTULO 2

Neste capítulo foram apresentados os fundamentos teóricos empregados para o desenvolvimento deste trabalho. De forma resumida, logo abaixo, tem-se as referências consideradas principais, utilizadas para estudo teórico de cada item, abordado neste capítulo:

- Método de diferenças finitas (MARCHI, 2001);
- Interpolação Polinomial (STEFFENSEN, 1950; FRANCO, 2007);
- Métodos de Otimização (RIBEIRO; KARAS, 2013; MARTINS, 2013);
- Erros Numéricos (MARCHI, 2001; SCHNEIDER, 2007);
- Extrapolação e Multiextrapolação de Richardson (MARTINS, 2013; VARGAS, 2013).

## 3 METODOLOGIA PARA O EMPREGO DE MER

O emprego de MER requer a obtenção de soluções numéricas, para determinada variável de interesse, em uma coleção de malhas distintas (MARTINS, 2013). Neste capítulo, é explicado a metodologia utilizada para a obtenção destas soluções numéricas, para as variáveis de interesse ( $\phi$ ), utilizando malhas não uniformes.

### 3.1 REFINO DA MALHA

Existem várias formas de se refinar uma malha não uniforme, conforme pode ser visto nos trabalhos de Marchi (2001) e Schneider (2007). Porém, no trabalho de Schneider (2007), constatou-se que ao utilizar um refino uniforme, em geral, a ordem do erro da solução numérica tende para a ordem teórica, obtida a priori, tornando o estudo da análise do erro mais efetiva. Portanto, em decorrência deste fato, no presente trabalho, utiliza-se somente refino uniforme, em particular com razão ( $r$ ) igual a dois.

A seguir, é mostrado como foi realizado este refino, partindo de uma malha inicial com quantidade de nós pré-estabelecida.

#### 3.1.1 Geração das malhas

Ao refinarmos uma malha ( $g$ ), com razão dois, na verdade estaremos dobrando a dimensão do vetor

$$h = (h_1, h_2, \dots, h_n)^T \quad (3.1)$$

da malha discretizada inicial ( $g$ ), conforme mostra a ilustração abaixo:

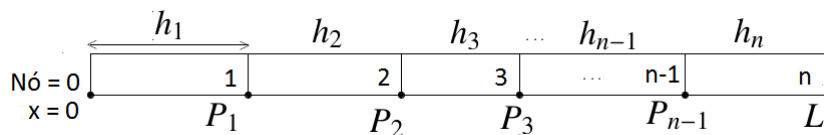


Figura 6 – Malha discretizada inicial ( $g$ ), intervalo  $\Omega[0, L]$ .

As entradas deste vetor possuem a propriedade:

$$\sum_{i=1}^n h_i = L; \quad h_i \in \mathbb{R}^+ - \{0\}; \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.2)$$

Portanto, tem-se  $n + 1$  pontos nodais na malha discretizada. Os pontos  $P_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ , correspondem aos pontos nodais da malha inicial, com exceção dos

extremos. Conforme é refinada a malha, novos pontos nodais são obtidos, mas os pontos  $P_i$  permanecem inalterados, conforme mostra a Figura 7.

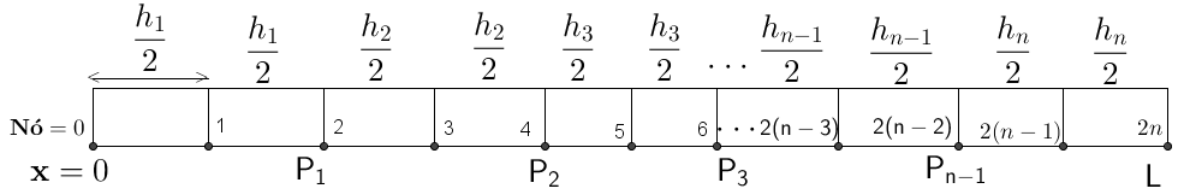


Figura 7 – Malha  $g_1$ , resultante do refino de razão dois a partir da malha inicial  $g$ .

Portanto, tem-se  $2n + 1$  pontos nesta nova malha, originada do refino da malha  $g$ . O novo vetor  $h$ , possui  $2n$  elementos da forma:

$$\left( \frac{h_1}{2}, \frac{h_1}{2}, \frac{h_2}{2}, \frac{h_2}{2}, \dots, \frac{h_n}{2}, \frac{h_n}{2} \right)^T. \quad (3.3)$$

Deste modo, conforme é refinada a malha inicial, os pontos  $P_i$  permanecem inalterados. O número de nós que é obtido na nova malha, após um número determinado de refinamentos, é representado pela equação

$$2^k n + 1, \quad (3.4)$$

onde  $k$  corresponde à quantidade de refinamentos sobre a malha inicial e  $n$  a dimensão do vetor  $h$  inicial. A Figura 8 mostra um exemplo prático do refino empregado neste trabalho.

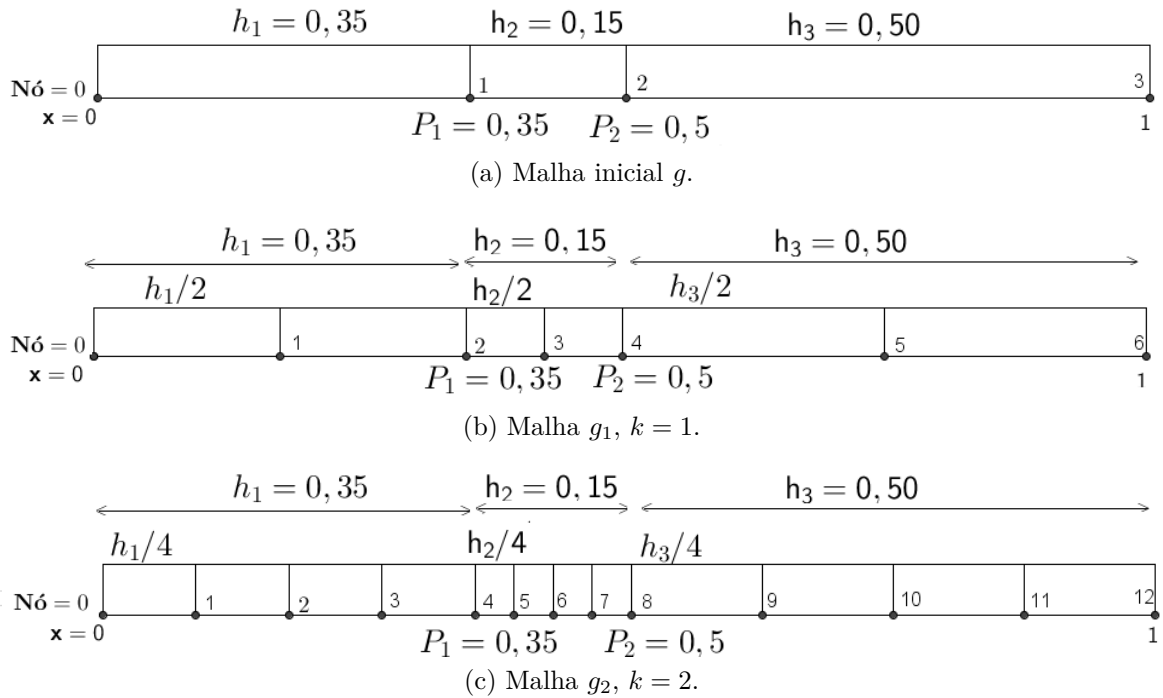


Figura 8 – Exemplo do esquema de refino uniforme com razão 2, aplicado em malhas não uniformes.

## 3.2 APLICAÇÃO DE MER

Baseado nos trabalhos de Martins (2013) e Martins et al. (2013), para melhor empregar MER na variável de interesse, deve-se primeiramente identificar qual o seu tipo, de acordo com a classificação (MARTINS, 2013; MARTINS et al., 2013):

**Tipo I:** são variáveis locais, cuja localização coordenada ( $c$ ) é mantida em todas as malhas ( $g$ ) consideradas e coincide com um ponto nodal (Fig. 9I), ou ainda, é caracterizada por uma variável global.

**Tipo II:** são variáveis locais em que  $c$  situa-se no ponto médio entre pontos nodais de ( $g$ ), ou seja, suas coordenadas coincidem com a média aritmética entre as coordenadas nodais (Fig. 9II).

**Tipo III:** são variáveis locais com  $c$  não coincidente com um ponto nodal de  $g$ , nem com o ponto médio entre coordenadas nodais, entretanto, possui uma localização fixa (Fig. 9III).

**Tipo IV:** são variáveis locais cujo valor é conhecido previamente. Nesse caso, busca-se identificar  $c$  (Fig. 9IV).

**Tipo V:** são variáveis locais onde  $c$  é desconhecida previamente, isto é, são variáveis que podem apresentar mudança de coordenada em malhas distintas (Fig. 9V).

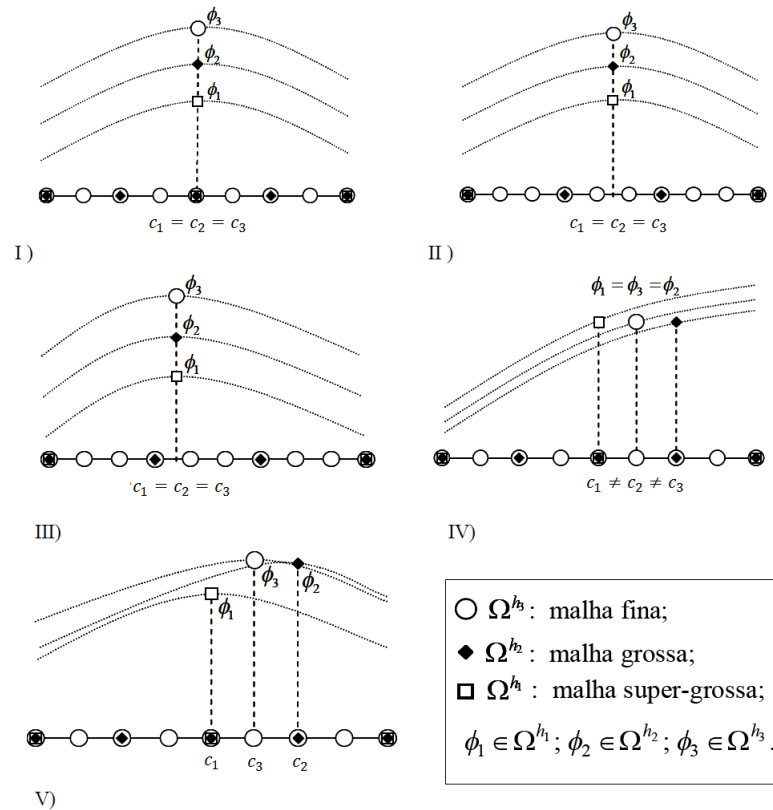


Figura 9 – Tipos de variáveis (MARTINS, 2013; MARTINS et al., 2013).

Para cada variável, Martins (2013) e Martins et al. (2013) determinam formas para se obter a variável de interesse, de acordo com a sua classificação, resumidamente:

Tabela 3 – Metodologia para o emprego de MER (MARTINS et al., 2013).

Variável	Obtenção de $\phi$
<b>Tipo I</b>	Obtém-se $\phi$ em cada malha e emprega-se MER diretamente com a a Eq. (2.37).
<b>Tipo II</b>	Emprega-se interpolação linear, para obtenção da $\phi$ , e em seguida considera-se a Eq. (2.37).
<b>Tipo III</b>	Emprega-se interpolação polinomial, com grau máximo possível, para obtenção da $\phi$ , em seguida considera-se a Eq. (2.37).
<b>Tipo IV</b>	Emprega-se interpolação polinomial, com grau máximo possível, e resolve-se a equação polinomial obtida considerando-se a igualdade entre o polinômio obtido e o valor estabelecido a priori, para a obtenção de $\phi$ em cada malha e, então, considera-se a Eq. (2.37).
<b>Tipo V</b>	Emprega-se interpolação polinomial com o grau máximo possível e, busca-se o seu ponto ótimo (máximo ou mínimo) para determinação de $\phi$ em cada malha, e ao final considera-se a Eq. (2.37).

### 3.3 MODELO MATEMÁTICO

A concepção de análise de erro só é segura se verificada em modelos matemáticos com solução analítica, pois somente neste caso é possível mensurar exatamente qual será o erro numérico, condição essencial para estudo base (SCHNEIDER, 2007).

Martins (2013) verificou a eficácia de MER para o caso da difusão unidimensional com geração de calor, resultando em uma equação de Poisson 1D, já apresentada na Seção 2.1:

$$\begin{cases} \frac{d^2 T}{dx^2} = S \\ T(0) = T_0, \quad T(L) = T_L. \end{cases}$$

Para este caso, Martins (2013) considera um caso específico para fins de estudo, adotando a solução analítica (fabricada) no intervalo  $\Omega[0, 1]$ :

$$T(x) = \frac{-1}{5}e^{3x} + 3x + 2, \quad (3.5)$$

que acarreta em

$$S = S(x) = -\frac{9}{5}e^{3x}, \quad T(0) = \frac{9}{5} \text{ e } T(1) = \frac{-e^3}{5} + 5. \quad (3.6)$$

Com a solução analítica, é possível analisar se o modelo matemático é resolvido adequadamente, através do método numérico. Martins (2013) resolveu esta equação, através do Método de Diferenças Finitas (MDF), com objetivo de empregar MER, para reduzir o erro de discretização ( $Eh$ ), obtendo resultados significativos. Porém Martins (2013) utilizou espaçamentos ( $h$ ) uniformes entre os nós.

A proposta deste trabalho é resolver o mesmo modelo matemático proposto por Martins (2013), isto é

$$\begin{cases} \frac{d^2T}{dx^2} = \frac{-9}{5}e^{3x} & x \in \Omega[0, 1] \\ T(0) = \frac{9}{5}; T(1) = \frac{-e^3}{5} + 5 \end{cases}, \quad (3.7)$$

mas utilizando espaçamentos  $h$  não uniformes na discretização do problema, tendo o mesmo objetivo, isto é, a redução do erro de discretização ( $Eh$ ).

Obtêm-se as soluções numéricas da equação (3.7) empregando o Método de Diferenças Finitas, utilizando a aproximação CDS (Seção 2.2.2) para a derivada de segunda ordem, em malhas não uniformes, com o método TDMA, para resolução dos sistemas lineares, originados do processo de discretização.

Para geração das malhas, utiliza-se a metodologia proposta na Seção 3.1.1, com dois modelos de malhas iniciais. A primeira (Malha A) (Figura 10), é escolhido o vetor  $h$ , com dimensão 3, com entradas:

$$h_1 = 0,35; h_2 = 0,15; h_3 = 0,50 \quad (3.8)$$

onde

$$h_1 + h_2 + h_3 = 1.$$

Portanto, segue que

$$P_1 = 0,35; P_2 = 0,5. \quad (3.9)$$

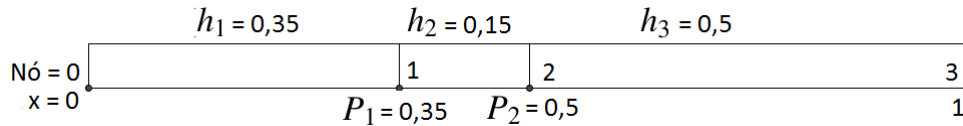


Figura 10 – Intervalo discretizado, malha inicial A.

Não existiu algum tipo de critério para escolha das constantes  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$ , apenas que elas satisfazem os critérios pré-estabelecidos dados pela equação (3.2).

De forma análoga, para o segundo modelo (Malha B), o vetor  $h$ , desta vez, possui dimensão 10. Com auxílio da sub-rotina **random\_number** da biblioteca **Portlib** do Fortran<sup>1</sup>, obtêm-se as entradas do vetor  $h$ , de forma aleatória:

<sup>1</sup> Fortran é uma das principais linguagens de programação, utilizada na engenharia, para aplicações científicas.

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \\ h_7 \\ h_8 \\ h_9 \\ h_{10} \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 6,8480868242E-08 \\ 4,4503481289E-03 \\ 6,1569559588E-02 \\ 1,1648155581E-01 \\ 1,6820478456E-01 \\ 1,4641324616E-01 \\ 5,8572243238E-02 \\ 1,5986867833E-01 \\ 1,3900348820E-01 \\ 1,4543602751E-01 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

em que

$$\sum_{i=1}^{10} h_i = 1.$$

Com efeito,

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 6,8480868242E-08 \\ 4,4504166098E-03 \\ 6,6019976198E-02 \\ 1,8250153200E-01 \\ 3,5070631656E-01 \\ 4,9711956272E-01 \\ 5,5569180596E-01 \\ 7,1556048429E-01 \\ 8,5456397249E-01 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Definido os dois modelos de malha, as variáveis de interesse a serem analisadas são: temperatura nos pontos nodais  $P_i$  da malha inicial, para  $i = 1, \dots, n-1$  ( $T_{P_i}$ ), inclinação da temperatura em  $x = 1$  ( $(\frac{dT}{dx})|_{x=1}$ ), inclinação da temperatura em  $x = 0$  ( $(\frac{dT}{dx})|_{x=0}$ ), temperatura média ( $T_m$ ), temperatura no ponto  $\frac{2}{3}$  ( $T_{2/3}$ ), temperatura máxima ( $T_{max}$ ) e finalmente o ponto onde a temperatura é máxima ( $x_{max}$ ).

A Tabela 4 mostra a classificação de cada variável de acordo com a metodologia proposta na Seção 3.2, para aplicação de MER. Todas as variáveis de interesse possuem solução analítica exata ( $\Phi$ ). As simulações foram feitas com precisão quádrupla, em Fortran.

A resolução numérica da equação (3.7), assim como a obtenção numérica das variáveis de interesse, podem ser vistas nos apêndices.

Tabela 4 – Classificação das variáveis de interesse para aplicação de MER.

Variável	Tipo
$T_{P_i}$	I
$\left(\frac{dT}{dx}\right)\bigg _{x=0}$	I
$\left(\frac{dT}{dx}\right)\bigg _{x=1}$	I
$T_m$	I
$T_{2/3}$	III
$T_{max}$	V
$x_{max}$	V

### 3.4 RESUMO DO CAPÍTULO 3

Neste capítulo foi apresentada a metodologia utilizada para aplicar MER, para o modelo matemático proposto por Martins (2013) (Eq. (3.7)):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2T}{dx^2} = \frac{-9}{5}e^{3x} \quad x \in \Omega[0, 1] \\ T(0) = \frac{9}{5} ; T(1) = \frac{-e^3}{5} + 5 \end{array} \right. .$$

A discretização do domínio foi realizada com o MDF para malhas não uniformes, utilizando dois modelos de base iniciais, para obter as outras malhas a partir do processo de refino, que convenientemente foi escolhido uniforme. Porque neste caso (refino uniforme), segundo Schneider (2007) a ordem do erro da solução numérica tende para ordem teórica, estimada a priori, facilitando as análises. Neste trabalho, utiliza-se a razão de refino ( $r$ ) uniforme igual a dois.

O objetivo das simulações consiste em avaliar e analisar o desempenho de MER nas variáveis de interesse. A metodologia utilizada aqui está baseada nos trabalhos de Marchi (2001), Schneider (2007) e principalmente Martins (2013).



## 4 RESULTADOS

Por questões de praticidade, neste capítulo são apresentados apenas os gráficos, para mais detalhes dos resultados (tabelas e gráficos adicionais), veja o apêndice A. Denota-se por  $Eh$ ,  $Em$ ,  $pEh$  e  $pEm$ , o erro de discretização e ordem de acurácia sem e com MER respectivamente, aplicado na variável de interesse.

Quando é referido à quantidade de extrapolações utilizadas, pode-se interpretar como o número de soluções numéricas empregadas para aplicar MER, porque as extrapolações foram feitas de acordo com o algoritmo proposto na Figura 5 da Seção 2.6.1.

Para obter  $Em$  e  $Eh$ , utilizou-se as equações (2.39) e (2.31) respectivamente, visto que existe a solução analítica exata ( $\Phi$ ), analogamente para as variáveis  $pEh$  e  $pEm$  foram obtidas através das equações (2.33) e (2.38). Vale ressaltar, para o cálculo de  $pEm$  é usado somente as soluções extrapoladas em níveis ( $m$ ) diferentes, isto é:  $\phi_{1,0}$ ,  $\phi_{2,1}$ ,  $\phi_{3,2}$ , ...,  $\phi_{G-1,G-2}$ ,  $\phi_{G,G-1}$ , conforme é mostrado na Figura 5. Portanto é esperado que  $pEm$  **tenha um aumento considerável**, mas não tenda para ordens verdadeiras do método escolhido, isto é, por exemplo, considere as ordens verdadeiras:

$$p_0 = 2, p_1 = 4, p_2 = 6, p_3 = 8, \dots$$

Não necessariamente  $pEm$  tenderá para

$$2, 4, 6, 8, \dots,$$

conforme é utilizado soluções obtidas em malhas mais finas, para o cálculo de  $pEm$ . Porém caso  $m$  seja fixo, por exemplo  $m = 1$ , da Figura 5:

$$\phi_{2,1}, \phi_{3,1}, \phi_{4,1}, \dots, \phi_{G,1}.$$

Neste caso  $pEm$  tenderá para 4, utilizando  $m = 2$ , tem-se:

$$\phi_{3,2}, \phi_{4,2}, \phi_{5,2}, \dots, \phi_{G,2}.$$

Agora  $pEm$  tenderá para 6, e assim por diante. Na Figura 11, é apresentado um exemplo deste resultado teórico, comentado anteriormente.

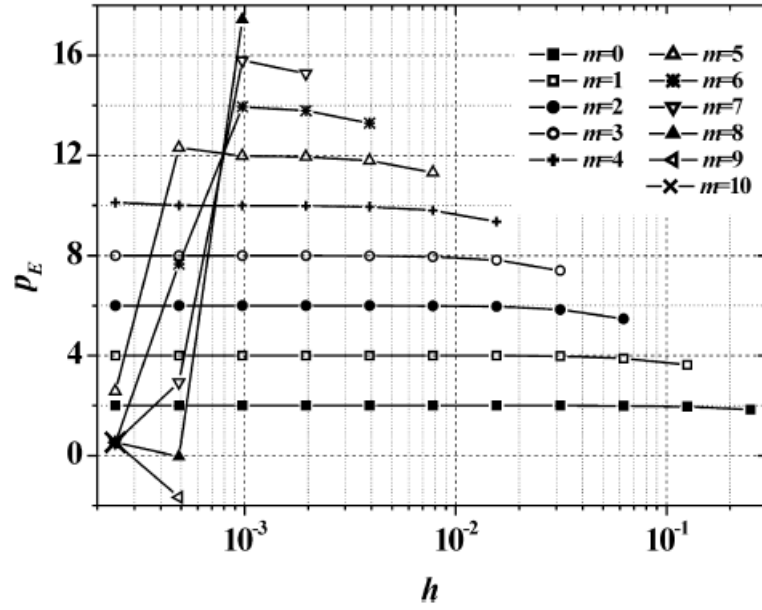


Figura 11 – Efeito da ordem  $pEm$ , de acordo com o número de extrapolações  $m$ , adaptado de Marchi et al. (2013).

## 4.1 RESULTADOS DA MALHA A

Nesta simulação foram utilizadas 25 malhas distintas, não uniformes, cuja malha mais grossa (Figura 10), contém quatro nós, onde estão incluídos os pontos nodais  $P_1$  e  $P_2$ , sendo esta a base para geração das outras malhas, conforme explicado na Seção 3.1.1, cuja malha mais fina contém 50.331.649 nós.

### 4.1.1 Variável $T_{P_1}$

Para a variável  $T_{P_1}$  ( $T$  avaliada em  $P_1$ ), pode-se aplicar MER diretamente. Neste caso, por ser uma variável do tipo I.

Como pode ser visto na Figura 12a, foi obtido uma significativa melhora na redução de  $Eh$ , para variável nodal  $T_{P_1}$ , com o emprego de MER. Para variáveis do tipo I, MER funciona melhor, comportamento teórico esperado, conforme Martins et al. (2013) e Martins (2013) relataram para este mesmo problema, com espaçamento ( $h$ ) uniforme.

Em relação à ordem de acurácia (Figura 12b), para efeito de verificação, era previsto que  $pEh$  convergisse para dois ao invés de um (ordem teórica), pois o refino realizado foi uniforme. Resultado similar, pode ser encontrado no trabalho de Marchi (2001), utilizando malhas não uniformes, com refino uniforme. Deve-se ser ressaltado o considerável aumento da ordem de  $pEm$ , sendo superior a 10. Para a variável nodal  $T_{P_2}$ , foram obtidos resultados similares, podendo ser vistas no apêndice A.

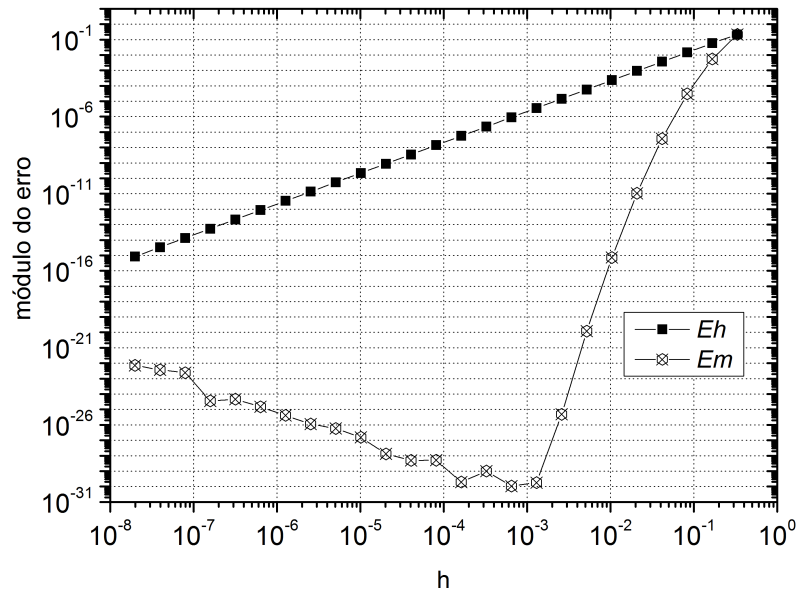
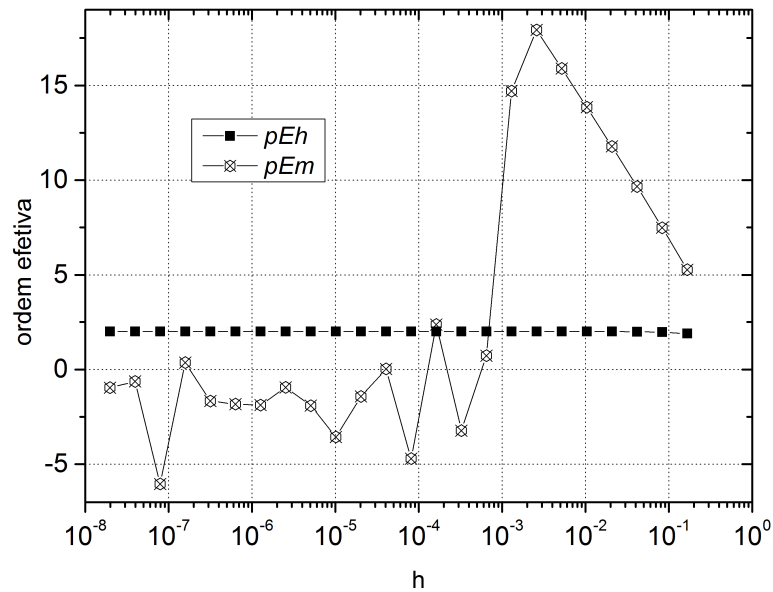
(a)  $Eh$  e  $Em$ .(b)  $pEh$  e  $pEm$ .

Figura 12 – MER aplicado em variável do tipo I, malha A, variável  $T_{P_1}$ , com 25 extrapolações.

#### 4.1.2 Temperatura média

Para a temperatura média ( $T_m$ ) foram obtidos resultados similares na redução de  $Eh$  com MER (Figura 13a), em relação à variável analisada anteriormente, por ser também do tipo I.

A ordem de acurácia com e sem MER (Figura 13b), novamente teve o comportamento teórico esperado:  $pEh$  convergiu para ordem teórica prevista e  $pEm$  teve um aumento significativo.

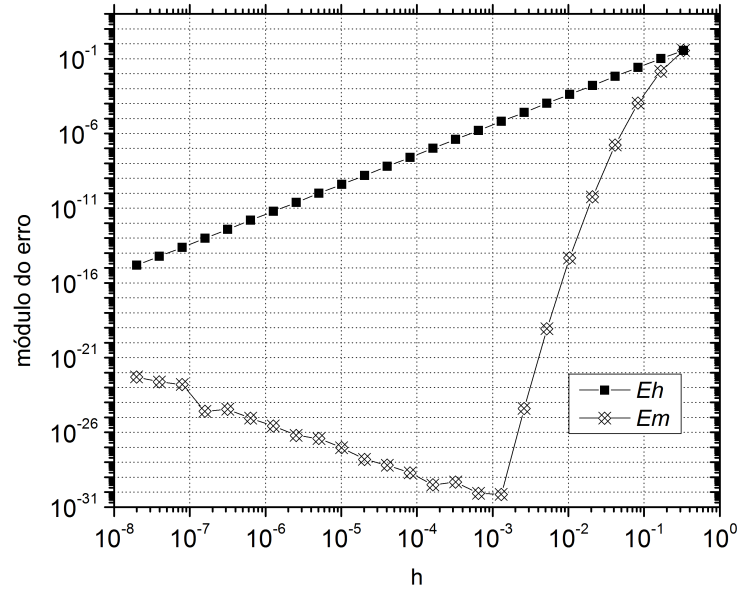
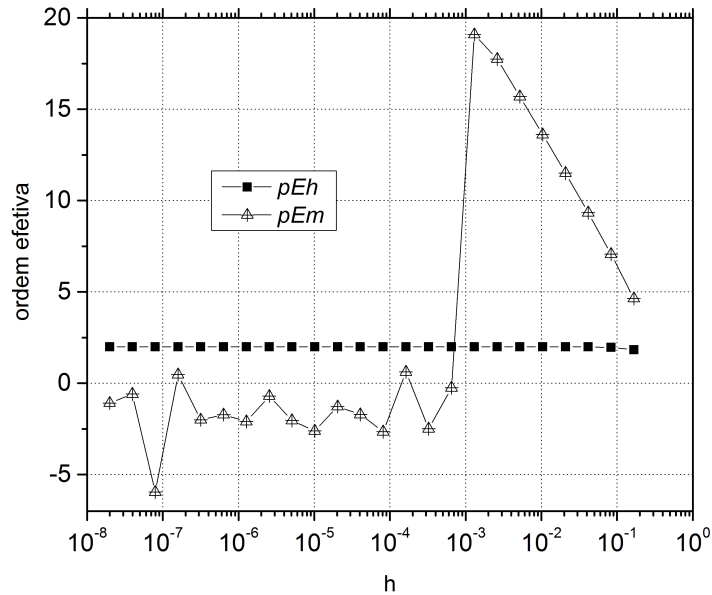
(a)  $Eh$  e  $Em$ .(b)  $pEh$  e  $pEm$ .

Figura 13 – MER aplicado na variável do tipo I, malha A, variável  $T_m$ , com 25 extrapolações.

### 4.1.3 Inclinação

Para obter as inclinações  $\left(\frac{dT}{dx}\right)_x$  nos pontos 0 e 1, utiliza-se aproximações em Diferenças Finitas do tipo DDS-2 e UDS-2 (Seção 2.2.1), para malhas não uniformes. Aqui a notação

$$Eh, x = 0;$$

significa: erro de discretização sem MER, na inclinação  $\left(\frac{dT}{dx}\right)_x$ , avaliada no ponto  $x = 0$ . A mesma analogia é feita para  $pEh$ ,  $pEm$  e  $Em$ .

Como pode ser observado na Figura 14, foram obtidos resultados similares com relação às variáveis analisadas anteriormente, por ser também do tipo I.

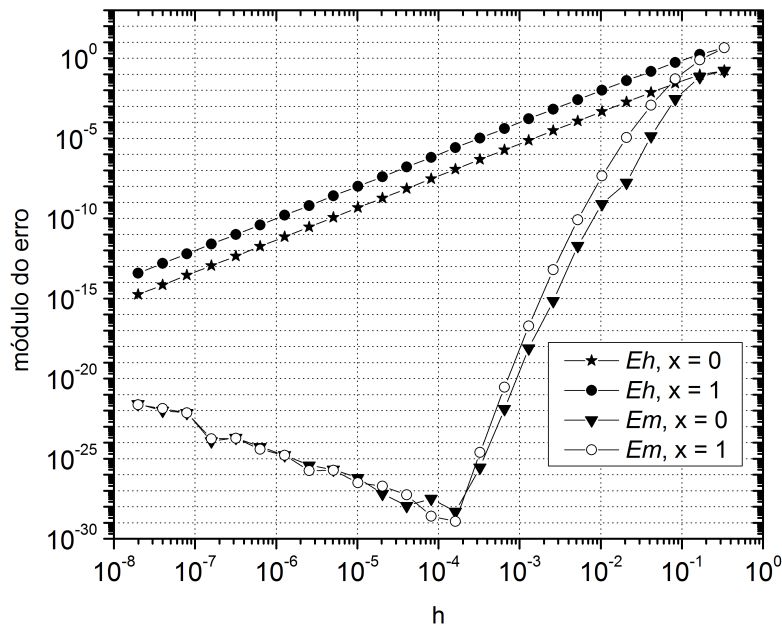


Figura 14 –  $Eh$  e  $Em$  da variável  $\left(\frac{dT}{dx}\right)_x$  com 25 extrapolações, malha A.

Novamente a ordem de acurácia com e sem MER teve comportamento esperado, como pode ser visto na Figura 15, exceto pela inclinação avaliada em  $x = 0$  que apresentou oscilações para variável  $pEm$ , até atingir o erro de máquina, devido a variável  $Eh$ , que apresentou um aumento das suas ordens verdadeiras de

$$p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 4, p_3 = 5, \dots (\text{previsto})$$

para

$$p_0 = 2, p_1 = 4, p_2 = 6, p_3 = 8, \dots$$

Estes casos eventualmente podem acontecer, como pode ser visto em Marchi (2001).

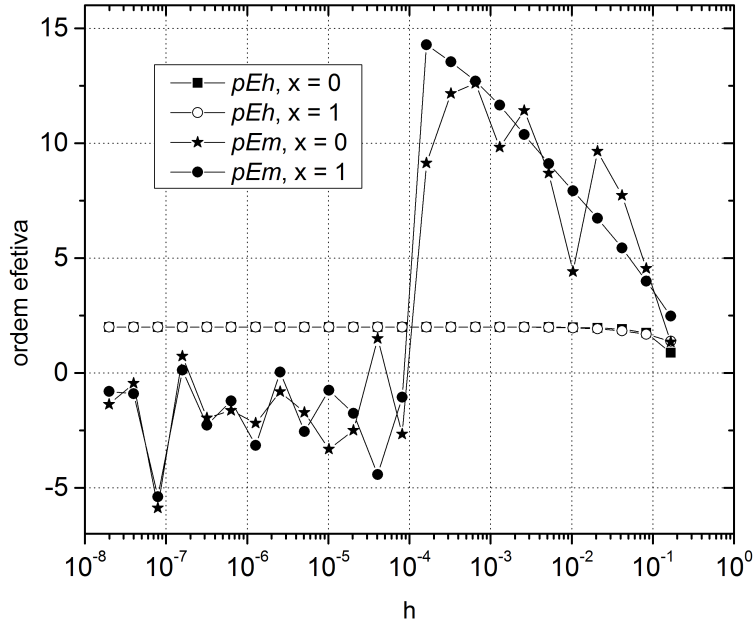


Figura 15 –  $pEh$  e  $pEm$  da variável  $\left(\frac{dT}{dx}\right)\bigg|_x$  com 25 extrapolações, malha A.

#### 4.1.4 Variável $T_{2/3}$

Até o momento foram obtidos resultados significativos, não encontrando nenhum tipo de empecilho, para todas as variáveis analisadas. Porém a partir desta variável do tipo III, existe a influência do erro de interpolação, ocasionado possivelmente pelo erro de arredondamento. As análises que são feitas nesta seção e nas seções 4.1.5, 4.2.4 e 4.2.5, motivaram a criação do apêndice B.

Para obter a variável do tipo III ( $T_{2/3}$ ), é utilizada a metodologia proposta na Seção 3.2, ou seja, emprega-se interpolação polinomial com o grau máximo possível, para obtenção de  $\phi$ , em seguida aplica-se MER.

Neste trabalho, foram testadas interpolações de ordens 1 até 10 para obtenção da  $\phi$  do tipo III. Considera-se neste trabalho o grau máximo possível a interpolação de ordem 10, devido ao seu auto custo computacional em relação aos outros graus testados de polinômio.

Além das análises dos resultados obtidos após a aplicação de MER, nesta variável, realizou-se uma breve análise do erro de interpolação ( $\xi_n$ ) cometido na obtenção destes polinômios ( $\varphi_n$ ), para cada ordem  $n$  utilizada. Para obter  $\xi_n$  considera-se a aplicação da equação (2.23):

$$\xi_n(x) = \overline{T}(x) - \varphi_n(x) \quad (4.1)$$

onde  $\bar{T}$  é a solução aproximada obtida do modelo matemático, neste caso dado pela equação (3.7)

$$\begin{cases} \frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{-9}{5} e^{3x} & x \in \Omega[0, 1] \\ T(0) = \frac{9}{5}; T(1) = \frac{-e^3}{5} + 5 \end{cases},$$

obtida com o método de Diferenças Finitas.

Como as interpolações são feitas em  $n + 1$  nós da malha, portanto o valor de  $\bar{T}$  é conhecido nestes nós, deste modo faz sentido avaliar o erro de interpolação através da equação (4.1), apenas nos nós que foram realizadas as interpolações, e se

$$\xi_n(x_k) = \bar{T}(x_k) - \varphi_n(x_k) = 0, \quad (4.2)$$

para  $k = 1, 2, \dots, n + 1$ , significa que só existe este polinômio que cumpre esta propriedade do Teorema 2.3.1.

Porém devido ao erro de arredondamento e outras fontes do erro numérico já vistas aqui, a propriedade dada pela equação (4.2) pode não ser satisfeita com exatidão, e em alguns casos pode até influenciar na obtenção da  $\phi$ . Para tanto, calcula-se a norma do erro de interpolação avaliada nos nós (Eq. (4.2)), através da norma  $\|\cdot\|_\infty$  (norma linha), onde

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad x \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad (4.3)$$

para facilitar as análises, na Figura 16 é apresentado um dos gráficos em escala bilogarítmica com esta norma em cada malha.

Este processo serviu como etapa de **verificação** da interpolação, como poderá ser visto mais adiante, outros detalhes deste estudo, assim como o método empregado para obter a solução numérica  $T_{2/3}$ , veja o apêndice B. Aqui a notação

$$Eh, p = 1;$$

significa: erro de discretização sem MER, com interpolação de ordem  $p = 1$ , da variável de interesse. A mesma analogia é feita para  $pEh$ ,  $pEm$  e  $Em$ .

Prosseguindo, conforme refina-se a malha, o erro de interpolação tende a crescer, como pode ser visto na Figura 16a, influenciando diretamente a solução numérica e consequentemente o erro de discretização (Figura 16b), neste caso  $Eh$  já não é mais somente afetado pelo erro de discretização e assim passa a ser somente o erro numérico, seguindo a definição vista na Seção 2.5.5, para alguns graus de polinômios e neste caso MER pode ter seu desempenho prejudicado.

Com exceção da interpolação de grau um (Interpolação Linear), que teve resultados inferiores, já na obtenção de  $Eh$ , o restante possui  $Eh$  com a mesma grandeza. Enquanto o erro de discretização permanece de forma linear (Figura 16b), a solução numérica obtida, difere apenas nas casas decimais. Quanto maior o grau da interpolação, maior a quantidade

de casas corretas. Assim o desempenho de MER com interpolações com ordens maiores, tem resultados melhores, como Martins (2013) mostrou em seu trabalho para variáveis deste tipo. Isto acontece até o momento que  $Eh$  passa a ser influenciado pelo erro de interpolação.

Para mostrar esse efeito, considera-se as malhas geradas nos intervalos  $10^{-2}$  até  $10^{-6}$  no eixo  $h$ , da Figura 16b, em seguida aplica-se MER, gerando os gráficos da Figura 18. Perceba que nas malhas mais grossas, por possuírem poucos pontos as interpolações de alta ordem, por exemplo 7, 8, 9 e 10, possivelmente não são realizadas pela falta de pontos na malha. Portanto, para este caso em particular, é escolhido este intervalo. Note que se for utilizado o intervalo  $10^{-2}$  até  $10^{-8}$  do eixo  $h$  e considerando as interpolações de ordens 8, 9 e 10, a partir de  $h \leq 10^{-6}$ , as soluções numéricas já estariam comprometidas, devido ao erro de interpolação, como pode ser visto no gráfico da Figura 16a. Para este intervalo considera-se as soluções numéricas obtidas somente com as interpolações de ordem 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, para obter os gráficos da Figura 17.

As ordens de acurácia com e sem MER (Figura 17b e 18b), tiveram comportamento teórico esperado, como previsto, enquanto o erro de discretização não é afetado pelo erro de interpolação. Note que  $pEh$  convergiu para ordem teórica, para o caso uniforme, devido ao refino empregado. Para este caso, os melhores resultados foram obtidos com as interpolações de ordens 10 e 9 (Figura 18a), porque foi obtido a menor grandeza de  $Em$ , chegando a quase  $10^{-30}$ , com apenas 10 extrapolações. Ou seja, os melhores resultados foram obtidos com as maiores interpolações feitas, como é previsto e confirmando a premissa de Martins (2013).

No apêndice A, é apresentado na Seção A.2.5 as tabelas contendo todos os resultados obtidos deste experimento, utilizando as 25 malhas, as interpolações de ordens 1 e 2 obtiveram resultados inferiores na redução de  $Eh$ , como o leitor poderá observar também. Mesmo utilizando mais extrapolações os melhores resultados continuam sendo das interpolações de ordem 9 e 10, atingindo uma magnitude de erro inferior a  $10^{-25}$ . Os dados utilizados para realização dos gráficos desta seção, esta na Seção A.2.5.1.

As análises feitas a posteriori do erro de interpolação, indicam que quando o erro de interpolação (Figura 16a), está com a magnitude do erro próxima a precisão utilizada, isto é entre  $10^{-34}$  e  $10^{-25}$  (neste caso era precisão quádrupla), que a solução obtida com esta interpolação era bem acurada e consequentemente, as chances de aplicar MER com sucesso para melhorar esta solução eram maiores.



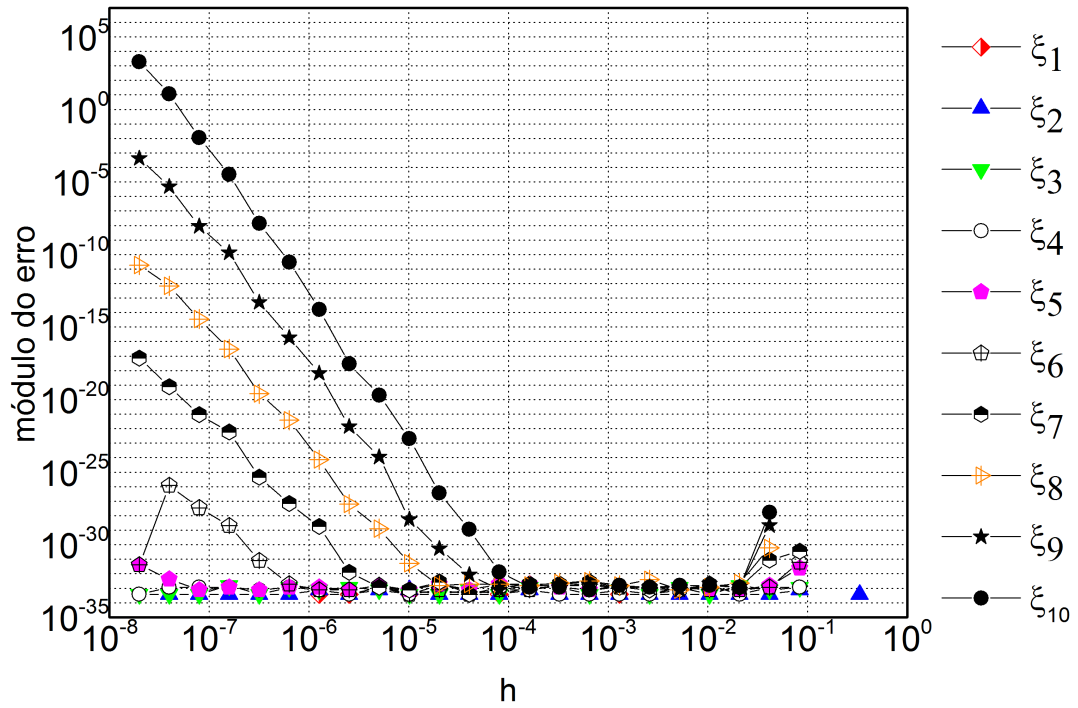
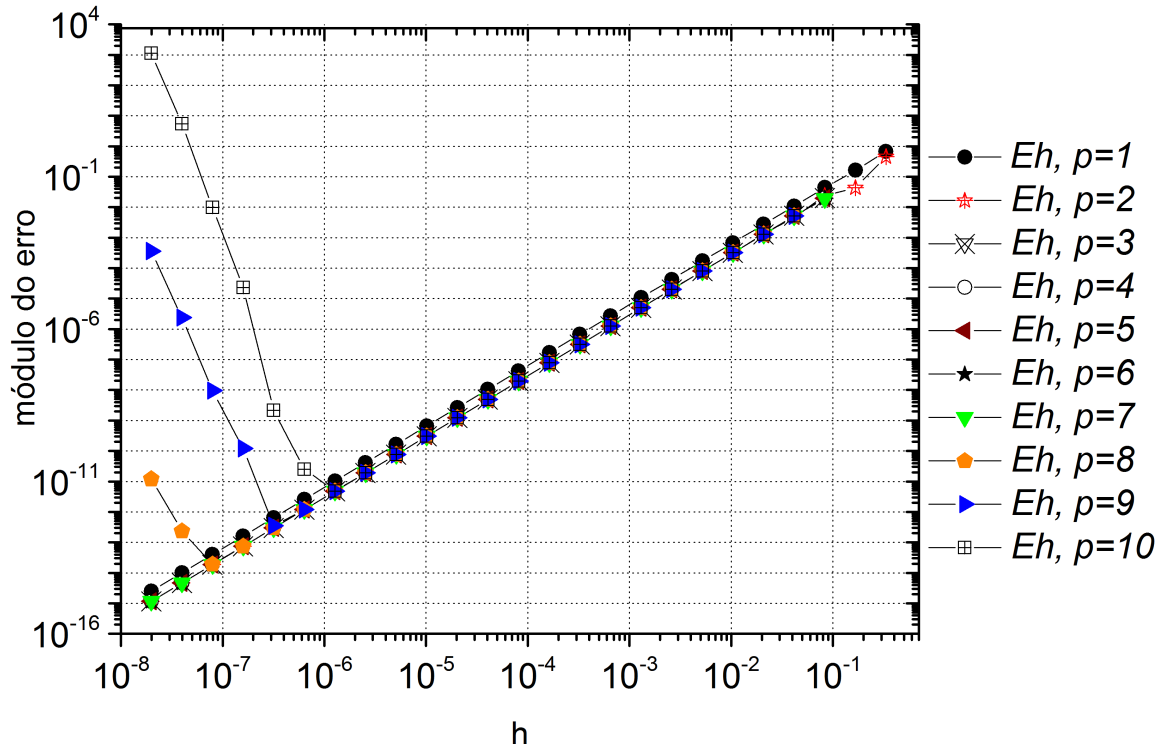
(a)  $\xi_n$ .(b)  $Eh$ .

Figura 16 – Influência do erro de interpolação ( $\xi_n$ ) no erro de discretização ( $Eh$ ), para obtenção da variável de interesse  $T_{2/3}$ , malha A.

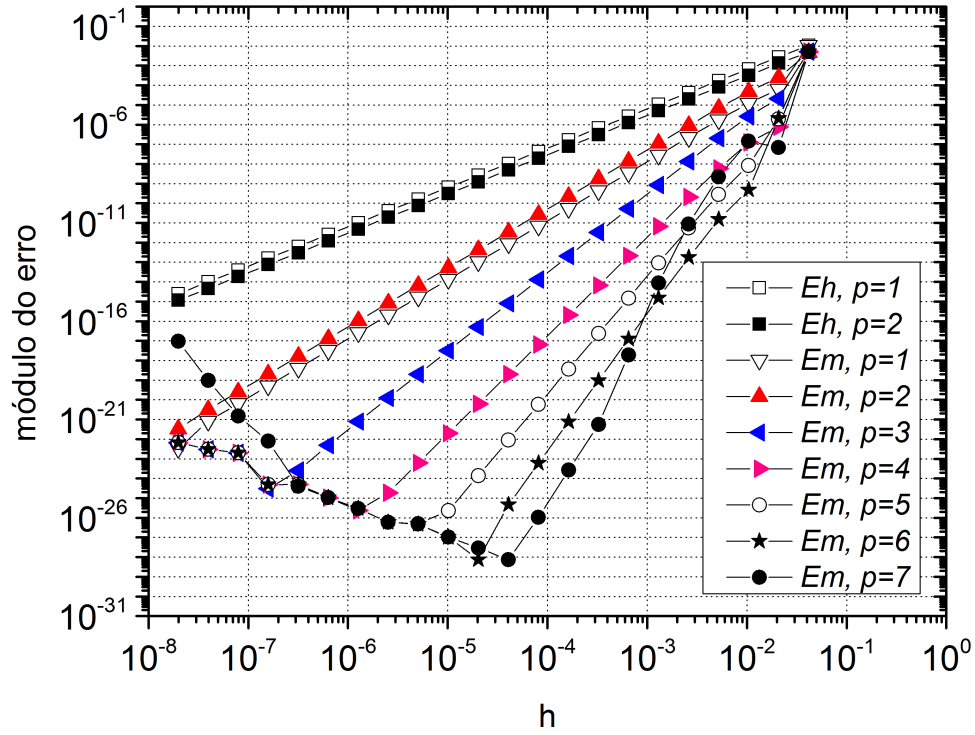
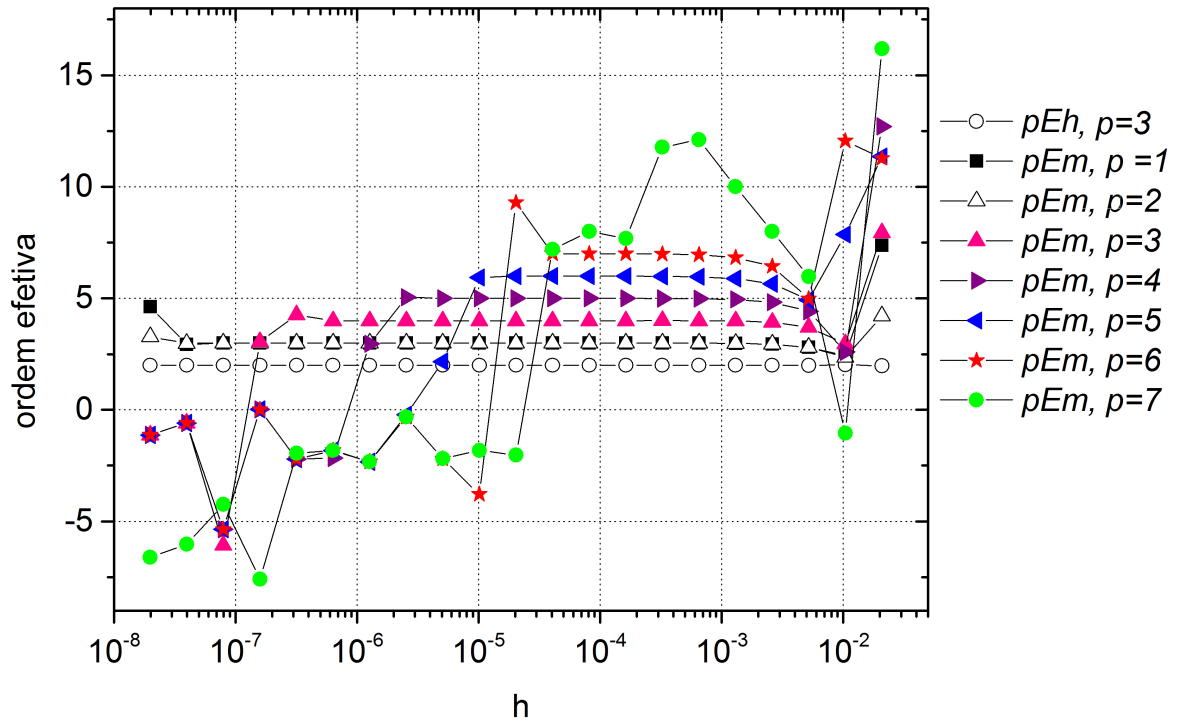
(a)  $Eh$  e  $Em$ .(b)  $pEh$  e  $pEm$ .

Figura 17 – MER aplicado na variável do tipo III, malha A, variável  $T_{2/3}$ , com 22 extra-polações.

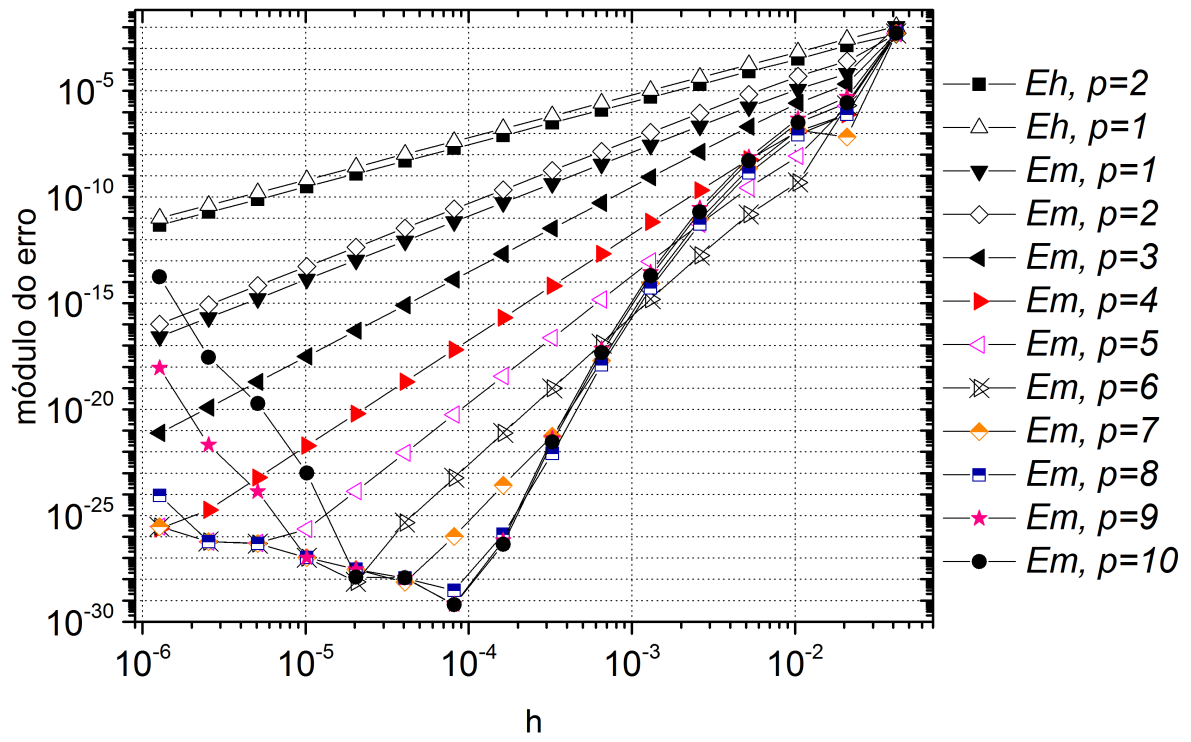
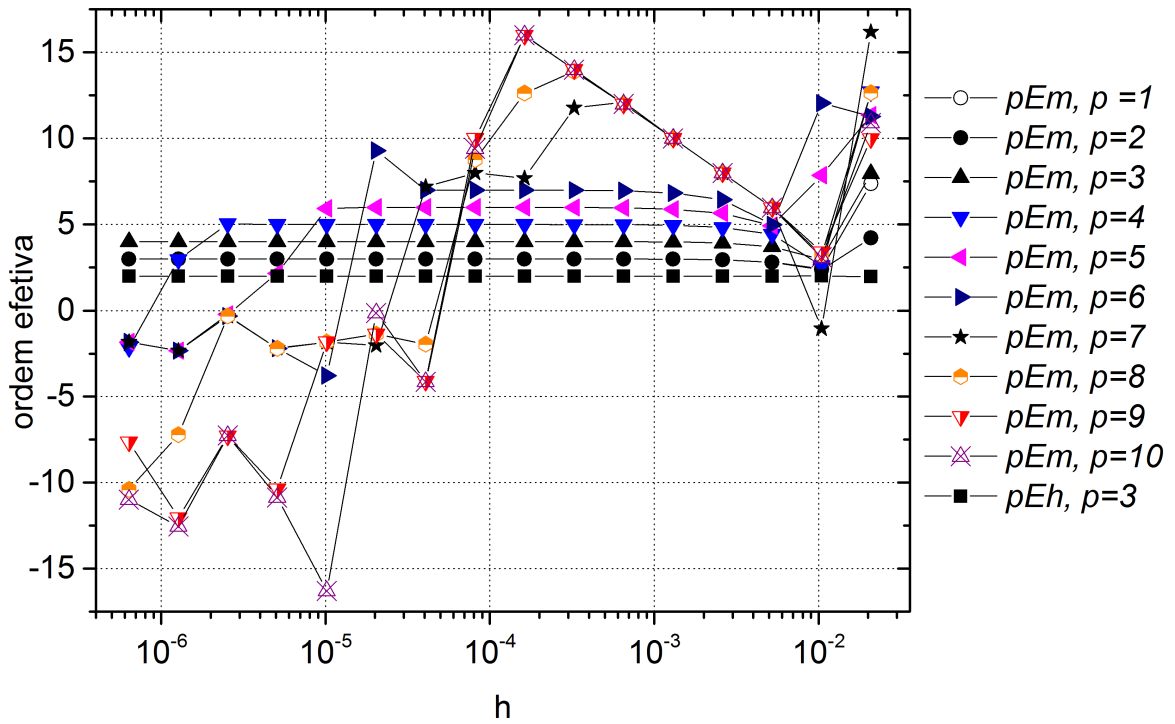
(a)  $Eh$  e  $Em$ .(b)  $pEh$  e  $pEm$ .

Figura 18 – MER aplicado na variável do tipo III, malha A, variável  $T_{2/3}$ , com 17 extra-polações.

#### 4.1.5 Variáveis $x_{max}$ e $T_{max}$

Para obter as variáveis do tipo V ( $T_{max}$  e  $x_{max}$ ), utiliza-se a metodologia proposta na Seção 3.2, isto é, emprega-se interpolação polinomial com o grau máximo possível e, busca-se o seu ponto ótimo (máximo ou mínimo) para determinação da  $\phi$ , em seguida aplica-se MER.

Com a finalidade de aplicar MER, para este tipo de variável (Tipo V), testou-se interpolações polinomiais de ordens 2 até 10. Neste trabalho busca-se o ponto de máximo em cada interpolação, este ponto corresponde a variável  $x_{max}$  e  $T_{max}$  a sua temperatura correspondente em cada ordem de interpolação. Considera-se a ordem máxima possível a interpolação de grau 10, assim como feito na seção anterior, para mais detalhes do método utilizado para determinar as variáveis  $x_{max}$  e  $T_{max}$ , veja o apêndice B. Nesta seção também é realizada análises do erro de interpolação cometido, para obtenção da variável  $x_{max}$  e consequentemente  $T_{max}$ .

Ao contrário do que foi feito na seção anterior, para aplicar MER foram utilizadas **todas** as soluções numéricas disponíveis, quando possível, visto que por exemplo nas malhas iniciais a interpolação de ordem 10 não se aplica, pela falta de pontos ou por não atender o critério da escolha desses pontos. Estes resultados podem ser vistos no apêndice A.

Para variável  $x_{max}$  conforme é refinada a malha, o erro de interpolação tende a crescer (Figura 19a), influenciando diretamente a solução numérica e consequentemente o erro de discretização desta variável (Figura 19b). Porém neste caso, ocorreu outro problema nas malhas iniciais: o método empregado para obtenção da variável  $x_{max}$ , não obteve bons resultados na obtenção do ponto de máximo com algumas interpolações, nas malhas iniciais. Mas conforme a malha é refinada, o método passou a funcionar de forma eficiente. Para estes dois problemas relatados, assim como na seção anterior,  $Eh$  já não é mais somente afetado pelo erro de discretização e portanto passa a ser somente o erro numérico, para algumas soluções obtidas, deste modo o desempenho de MER pode ser comprometido.

Para esta variável, constatou-se um desempenho inferior com a interpolação de ordem 2, já na obtenção de  $Eh$ , porém nas outras ordens ( $p = 3, 4, \dots, 10$ ),  $Eh$  teve desempenho similar, até ser contaminado em algumas interpolações pelo erro de interpolação.

Por outro lado, o  $Eh$  da variável  $T_{max}$  (Figura 20), teve resultado similares, mesmo sendo afetada indiretamente pelo erro de interpolação e o problema de convergência do método utilizado, porque sua obtenção depende da variável  $x_{max}$ .

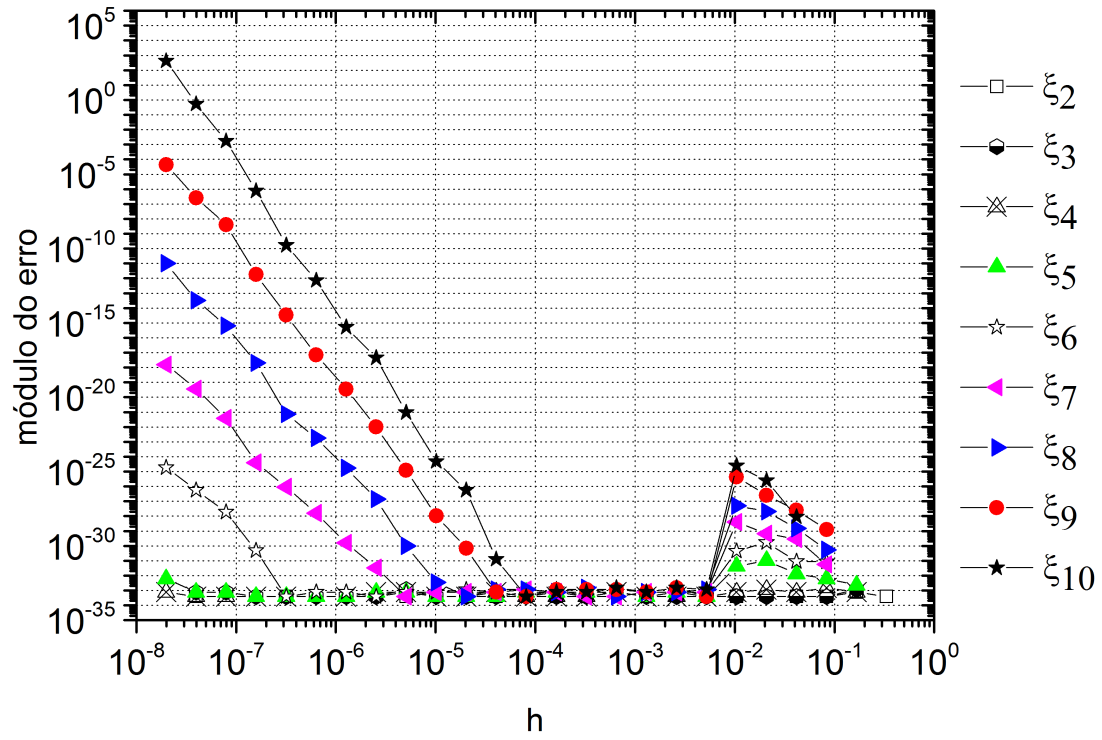
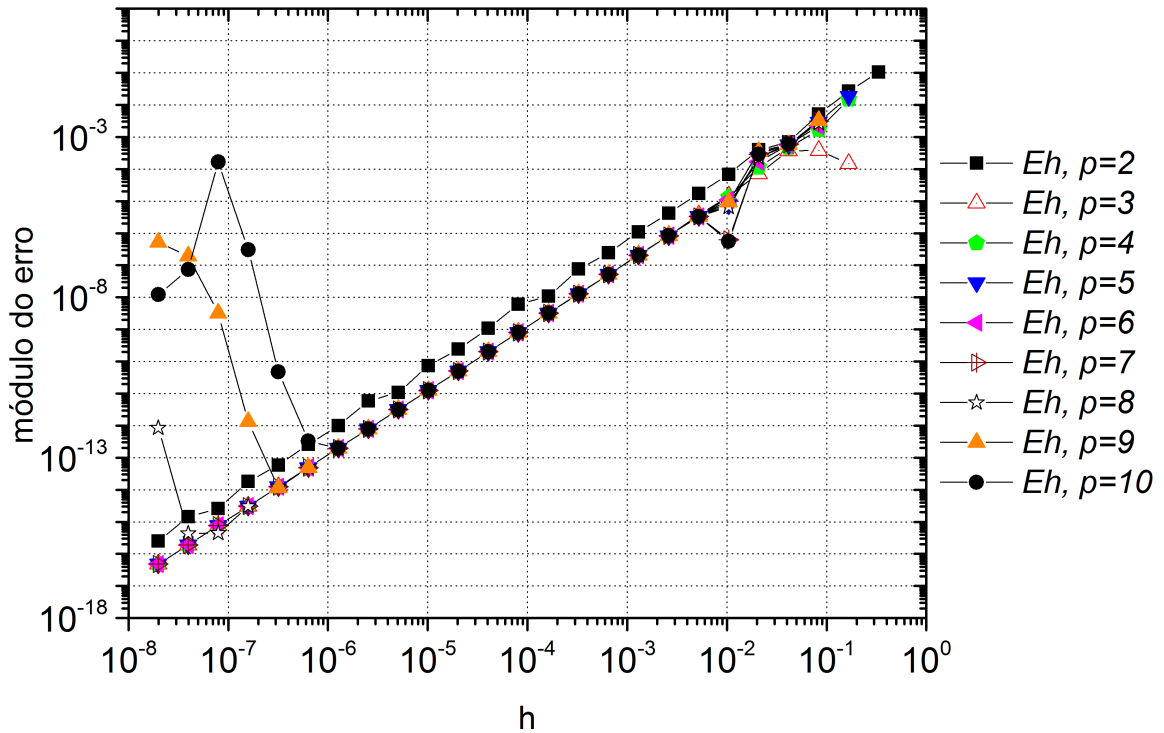
(a)  $\xi_n$ .(b)  $Eh$ , variável  $x_{max}$ .

Figura 19 – Influência do erro de interpolação ( $\xi_n$ ) no erro de discretização ( $Eh$ ), para obtenção da variável de interesse  $x_{max}$ , malha A.

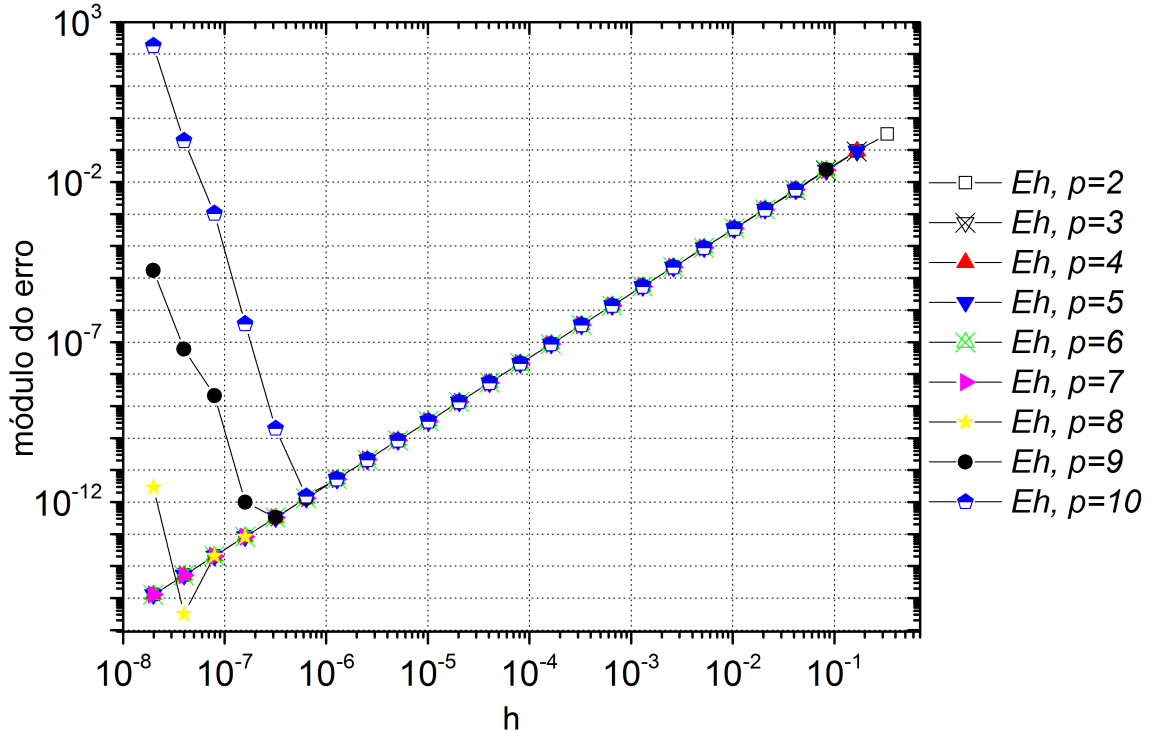


Figura 20 –  $Eh$  da da variável de interesse  $T_{max}$ , malha A.

Como foram utilizadas todas as malhas, as primeiras soluções numéricas obtidas tiveram influência no desempenho de MER na variável  $x_{max}$ , mas independente deste problema, conforme as soluções numéricas e ordem de acurácia melhoravam e consequentemente a ordem de acurácia com MER melhorava (Figura 21) e por fim MER tinha o efeito esperado, como pode ser visto na Figura 22. Mesmo com a ordem de acurácia sem MER funcionando bem para outras interpolações (em sua maioria), o melhor resultado foi obtido com a interpolação de ordem 9, mesmo com o problema da acurácia nas malhas iniciais, obtendo magnitude do erro para  $Em$  inferior a  $10^{-28}$ .

Note que, se escolhidos os intervalos onde foram obtidas as soluções numéricas, igual feito na seção anterior, possivelmente MER teria um desempenho bem mais acurado e provavelmente as interpolações de ordens 9 e 10 seriam as melhores (quase empatadas), conforme Martins (2013) mostra em seu trabalho para variáveis deste tipo. Portanto, embora os resultados com a interpolações de alta ordem já sejam significativas, seguindo a linha de pensamento da seção anterior, é possível deixar as soluções mais acuradas ainda, simplesmente ignorando as soluções numéricas obtidas nas malhas iniciais, com intuito de aplicar MER logo em seguida, nestas soluções numéricas mais acuradas.

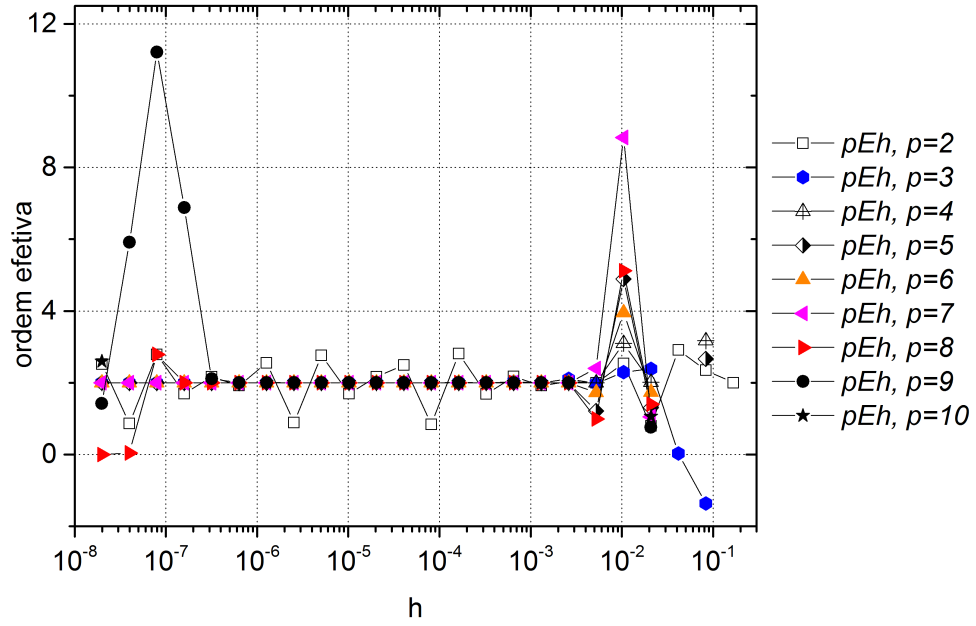
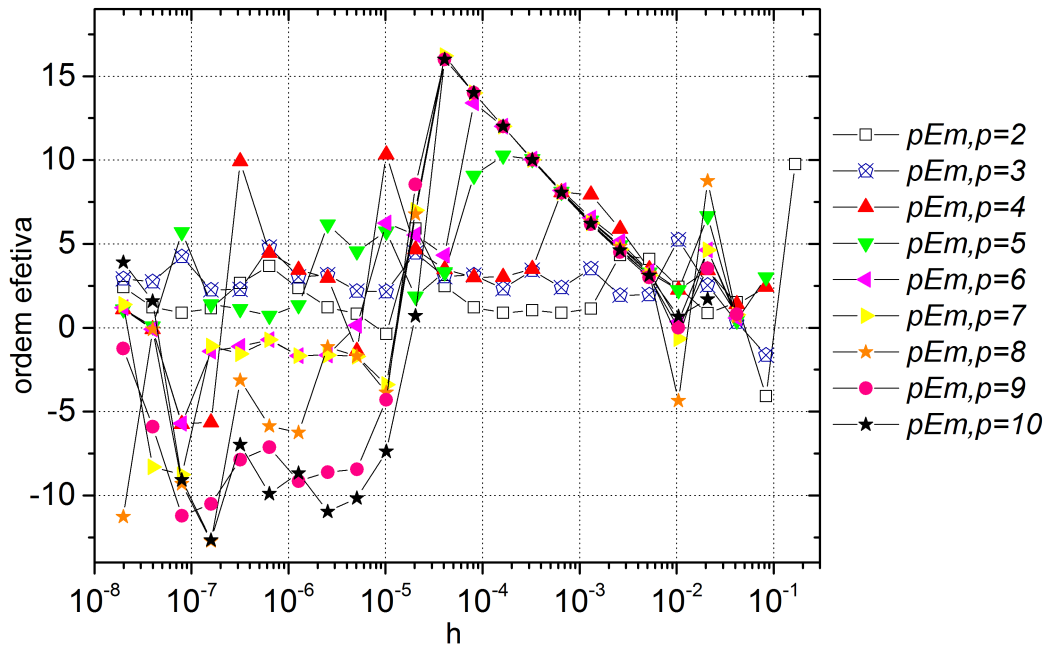
(a)  $pEh$ .(b)  $pEm$ .

Figura 21 – Influência de  $pEh$  em  $pEm$ , aplicado na variável do tipo V, malha A, variável  $x_{max}$ , com o máximo de extrapolações possíveis.

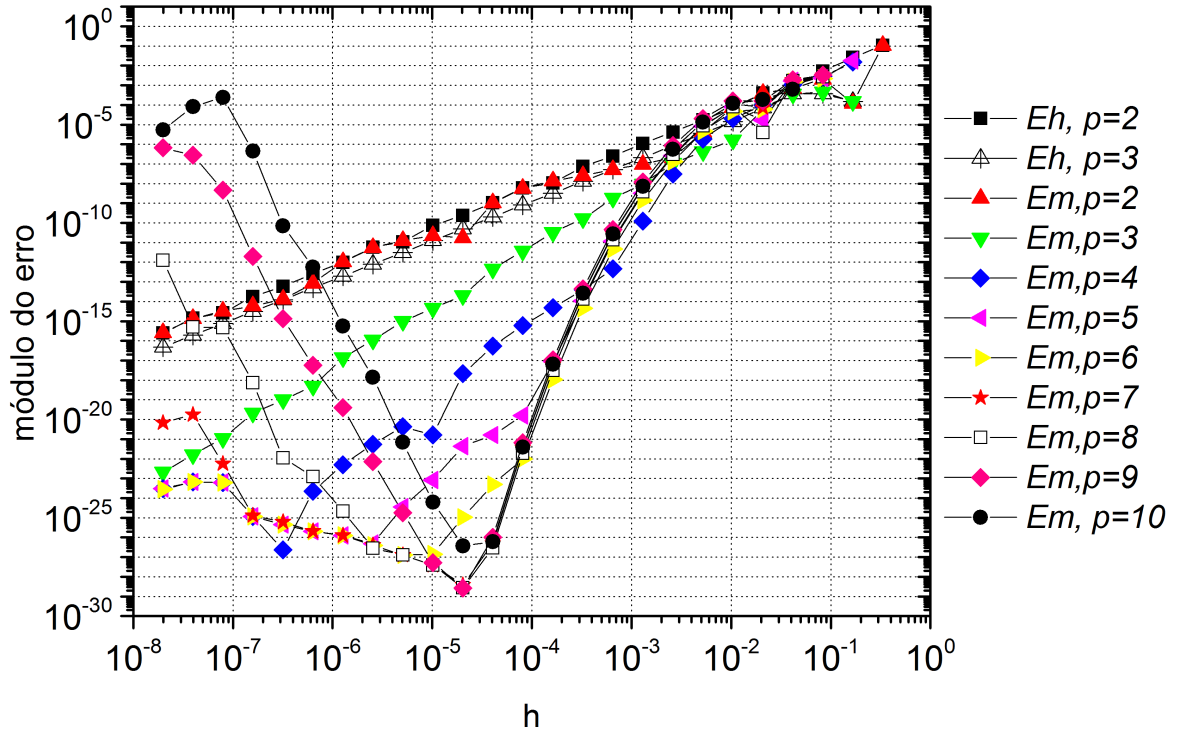


Figura 22 – MER aplicado na variável do tipo V, malha A, variável  $x_{max}$ , com o máximo de extrapolações possíveis.

Para variável  $T_{max}$ , como as soluções obtidas nas malhas iniciais não tiveram problemas, assim as ordens de acurácia apresentaram comportamento esperado (Figura 23) e consequentemente MER funciona melhor (Figura 24). Novamente as interpolações com grau maior apresentaram erro menor, em particular as de ordens 9 e 10.

Como já comentado anteriormente, era possível ter um desempenho melhor com MER, se tivessem sido escolhidas as soluções numéricas conforme foi feito na seção anterior. MER teria o efeito esperado, porém esse resultado mostra que, mesmo tendo algumas soluções pouco acuradas, MER pode funcionar tendo desempenho significativo, porém necessita de mais malhas com soluções bem acuradas para chegar no erro de máquina. Mas continua **melhor**, em comparação com o número de malhas utilizadas para obter  $Eh$  com magnitude  $10^{-14}$  e  $10^{-15}$ , valores máximos alcançados em malhas com milhões de pontos, para as duas variáveis de interesse.

Para obter os resultados apresentados nesta seção, recomenda-se utilizar interpolações com o grau máximo possível. Pelas análises feitas, foram obtidos resultados qualitativos do apresentado por Martins (2013), para estas mesmas variáveis com malhas uniformes.



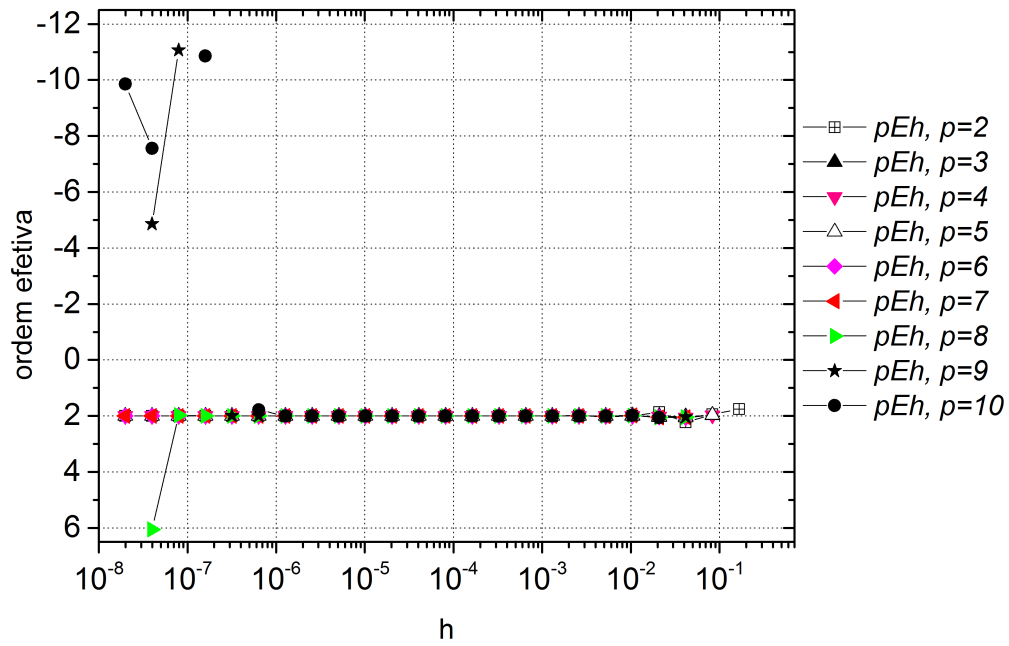
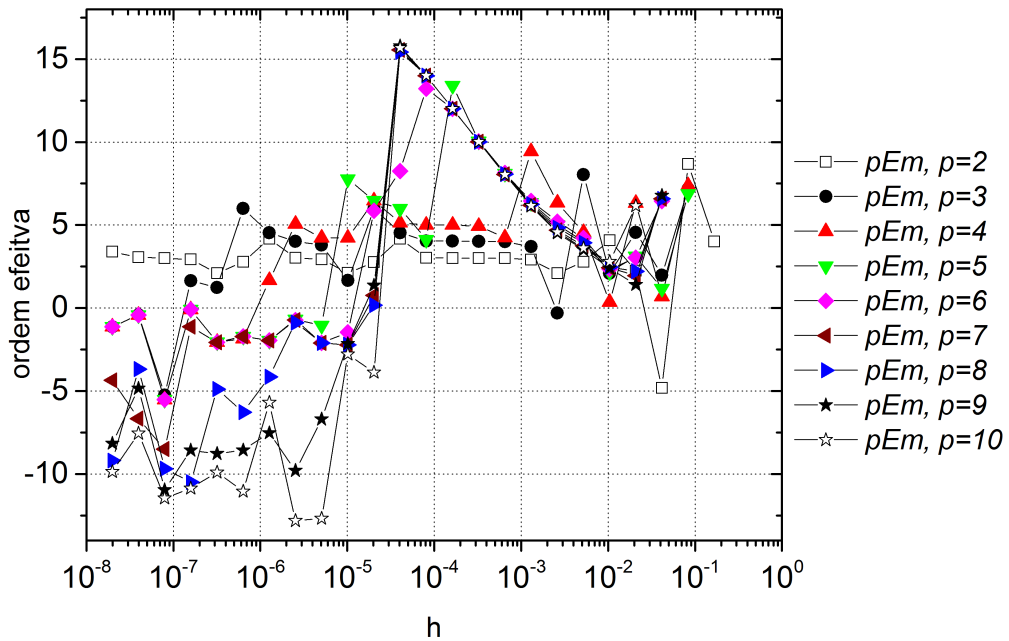
(a)  $pEh$ .(b)  $pEm$ .

Figura 23 – Influência de  $pEh$  em  $pEm$ , aplicado na variável do tipo V, malha A, variável  $T_{max}$ , com o máximo de extrapolações possíveis.

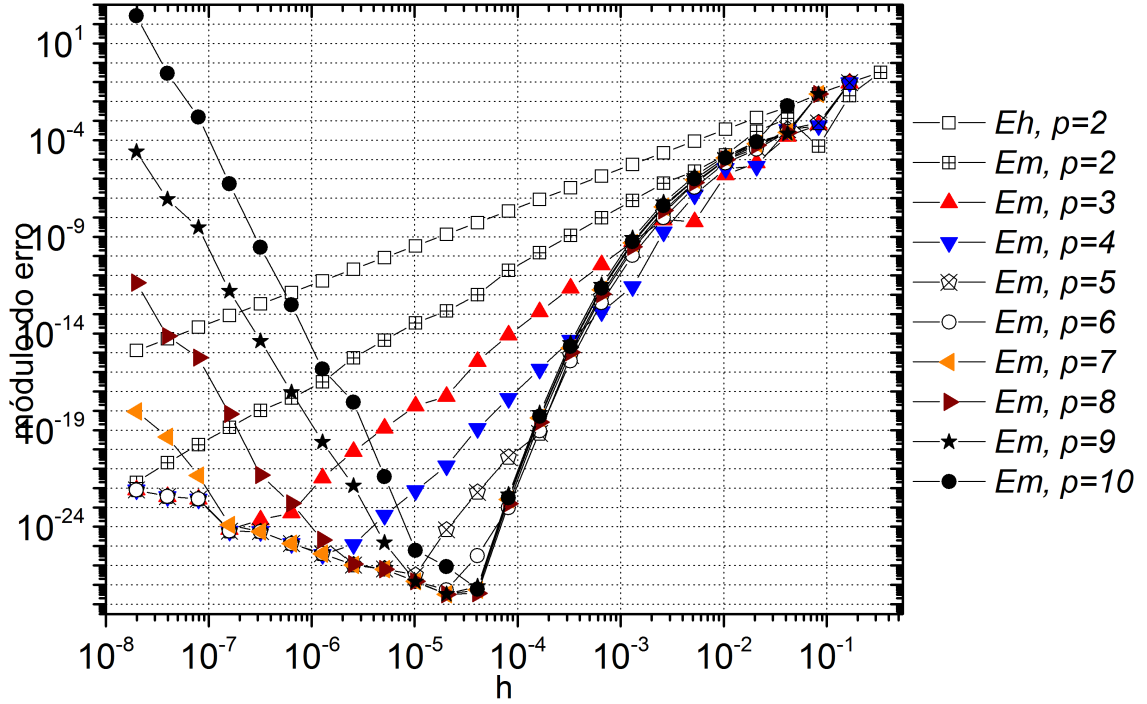


Figura 24 – MER aplicado na variável do tipo V, malha A, variável  $T_{max}$ , com o máximo de extrapolações possíveis.

## 4.2 RESULTADOS DA MALHA B

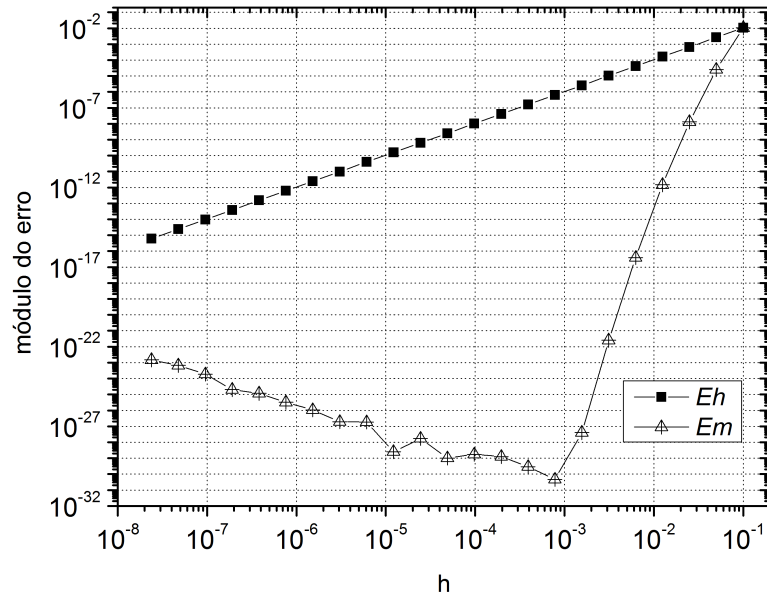
Nesta simulação, foram utilizadas 23 malhas distintas, não uniformes, cuja malha mais grossa (malha B) contém onze nós, com espaçamentos determinados pelo vetor  $h$  (Eq. (3.10)), onde estão incluídos os pontos nodais  $P_1, P_2, \dots, P_9$  (Eq.(3.11)), sendo esta a base para geração das outras malhas, conforme explicado na Seção 3.1.1, cuja malha mais fina contém 41.934.041 nós.

Por questões de praticidade, assim como feito na seção anterior, são apresentados apenas os gráficos. Para mais detalhes dos resultados (tabelas e gráficos adicionais), veja o apêndice A.

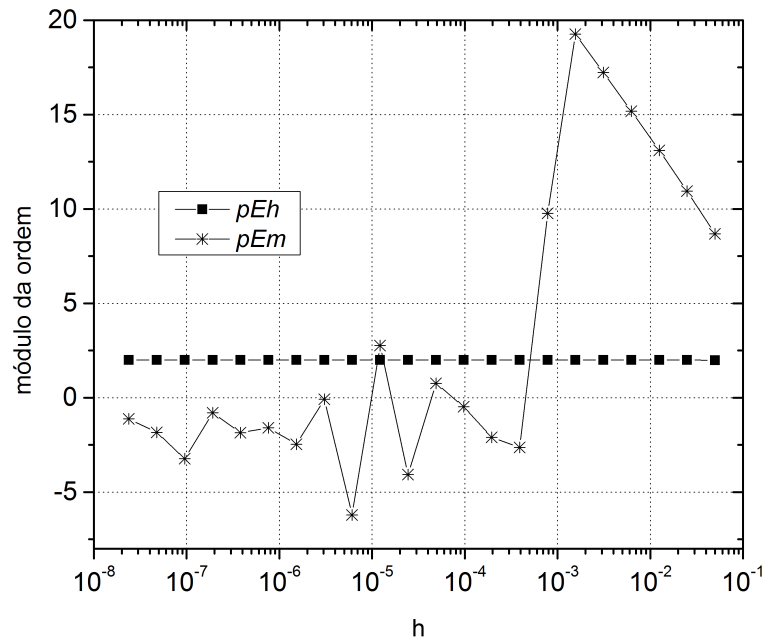
Como a obtenção das variáveis de interesse é idêntica, mudando apenas a malha inicial, nesta seção são apresentadas somente os resultados (gráficos). Foi utilizada a quantidade máxima de extrapolações possíveis em todos os casos. Os resultados apresentados aqui foram melhores com relação aos da seção anterior, pelo fato da malha inicial B conter mais pontos, não ocorreram problemas com a obtenção de  $Eh$  nas variáveis do tipo V nas malhas iniciais, somente o erro de interpolação afetou a acurácia de  $Eh$  nas variáveis dos

tipos III e V em algum momento, como era esperado. Portanto as conclusões feitas na seção anterior foram alcançadas com uma maior acurácia na malha B.

#### 4.2.1 Variável $T_{P_4}$



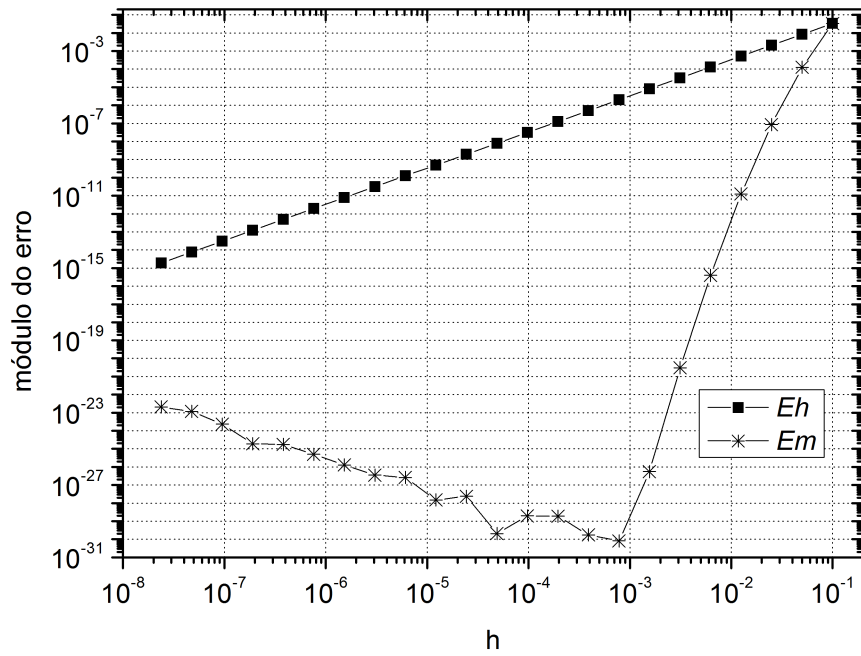
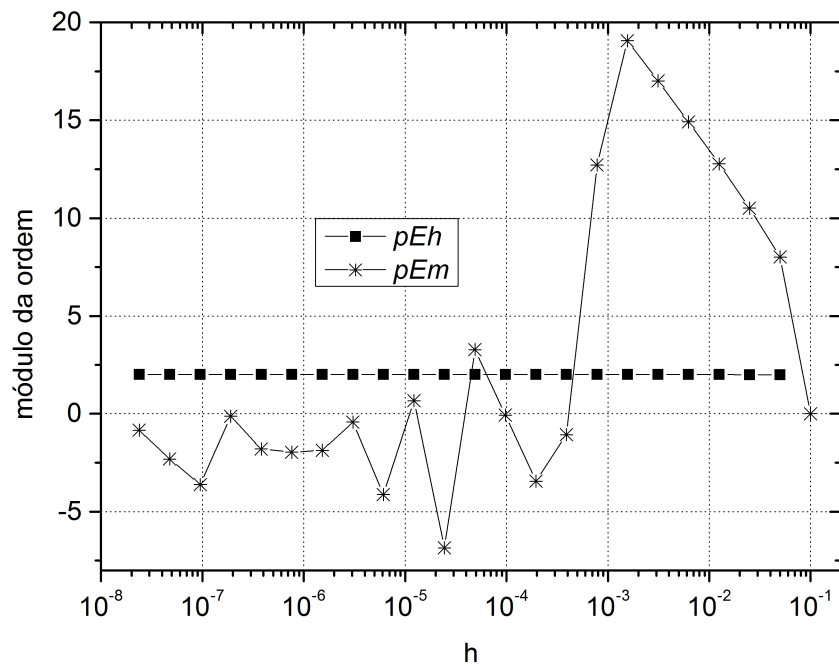
(a)  $Eh$  e  $Em$ .



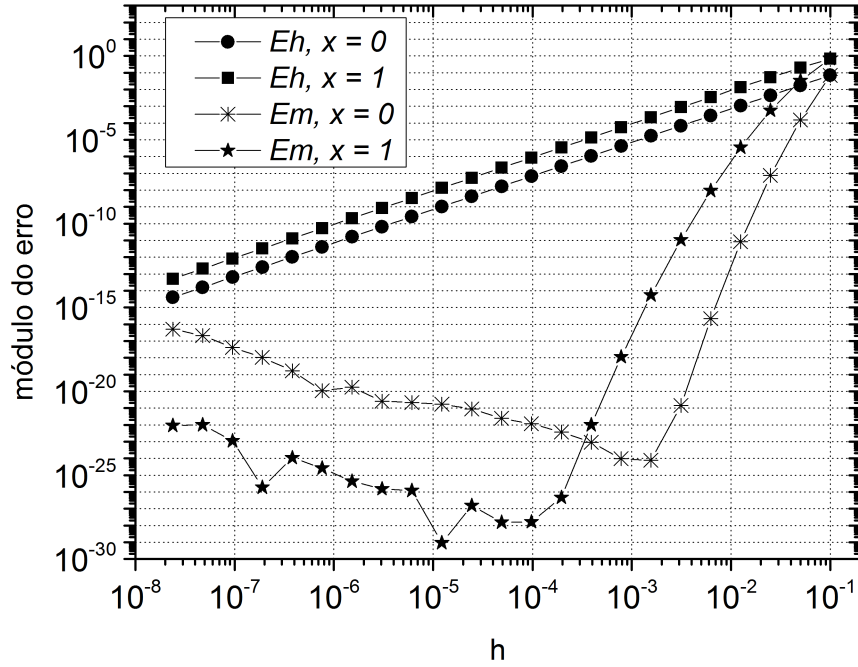
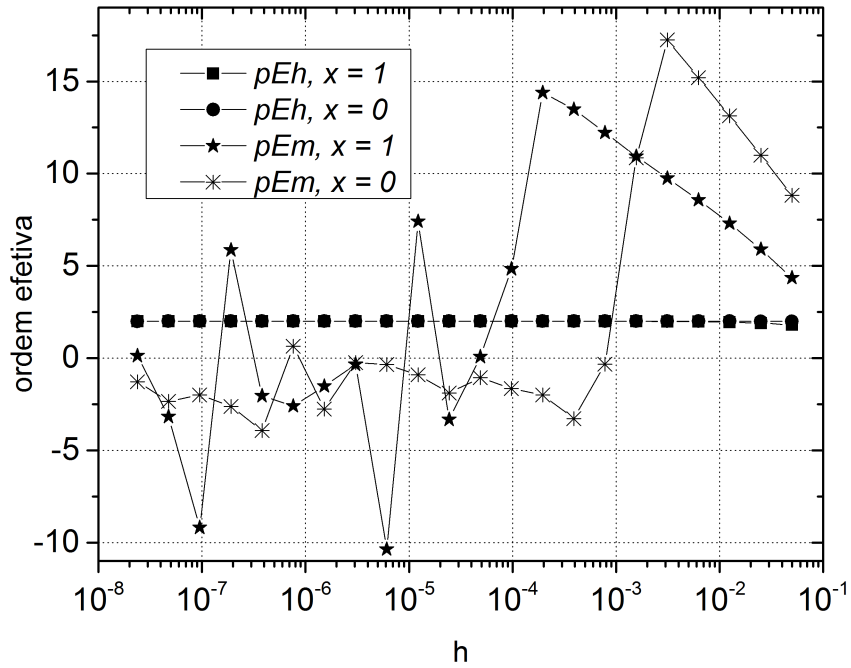
(b)  $pEh$  e  $pEm$ .

Figura 25 – MER aplicado em variável do tipo I, malha B, variável  $T_{P_4}$ .

## 4.2.2 Temperatura média

(a)  $Eh$  e  $Em$ .(b)  $pEh$  e  $pEm$ .Figura 26 – MER aplicado na variável do tipo I, malha B, variável  $T_m$ .

## 4.2.3 Inclinação

(a)  $Eh$  e  $Em$ .(b)  $pEh$  e  $pEm$ .Figura 27 – MER aplicado na variável do tipo I, malha B, variável  $\left(\frac{dT}{dx}\right)_x$ .

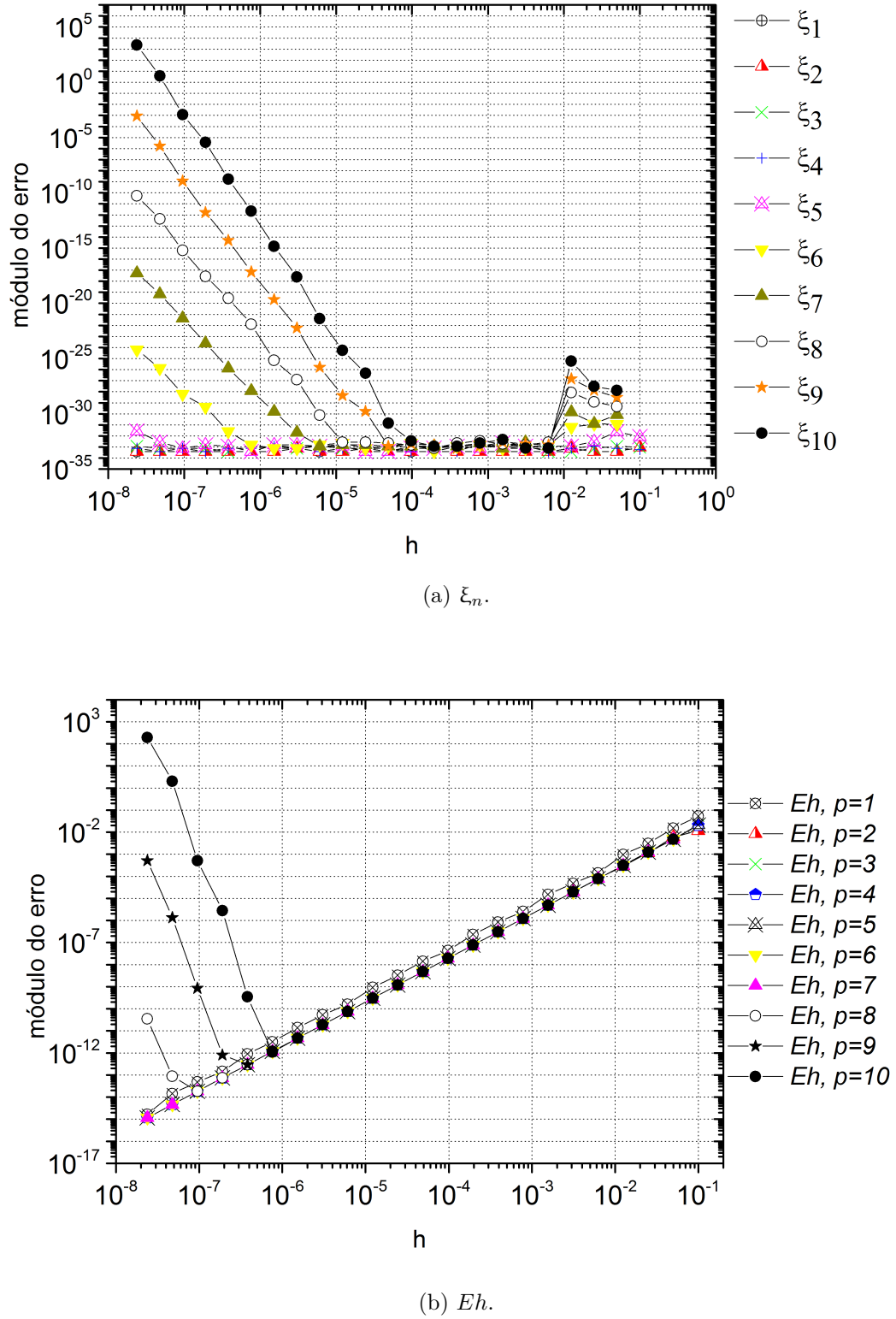
4.2.4 Variável  $T_{2/3}$ 

Figura 28 – Influência do erro de interpolação ( $\xi_n$ ) no erro de discretização ( $Eh$ ), para obtenção da variável de interesse  $T_{2/3}$ , malha B.

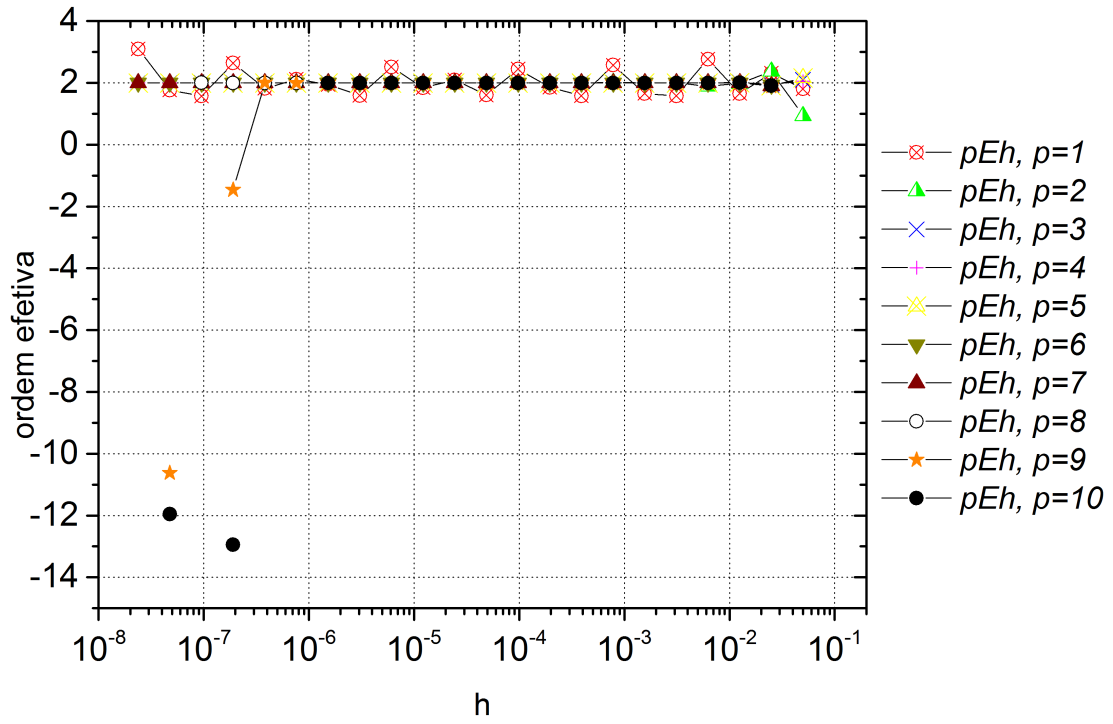
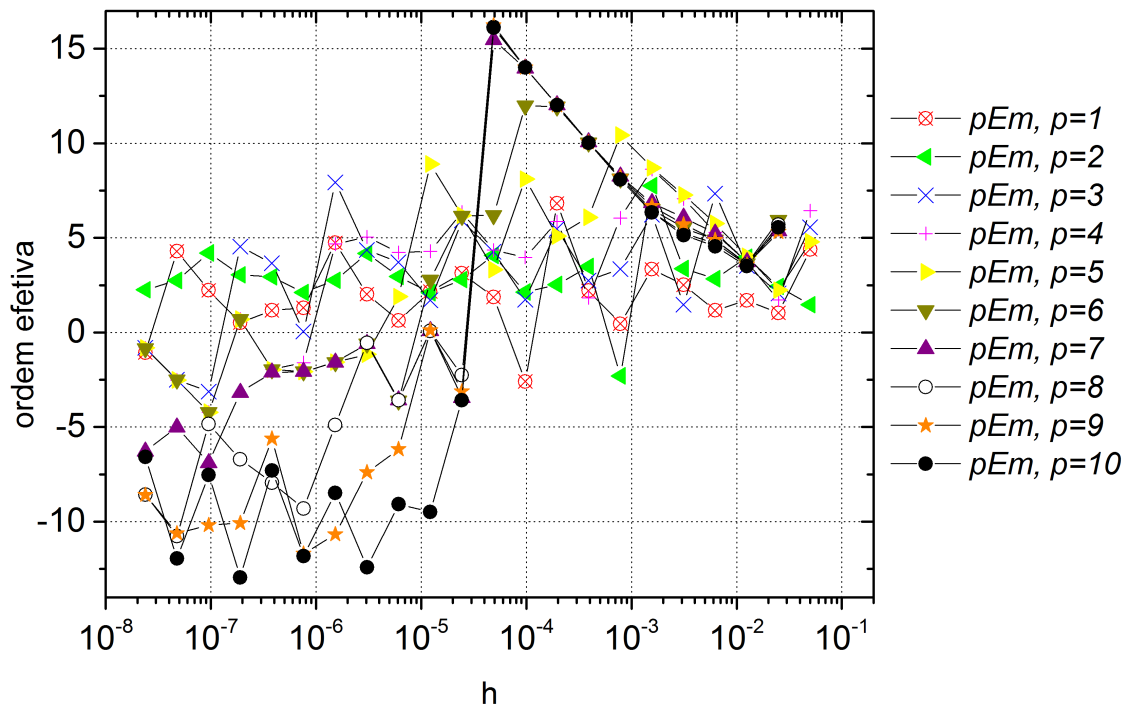
(a)  $pEh$ .(b)  $pEm$ .

Figura 29 – Influência de  $pEh$  em  $pEm$ , aplicado na variável do tipo III, malha B, variável  $T_{2/3}$ .

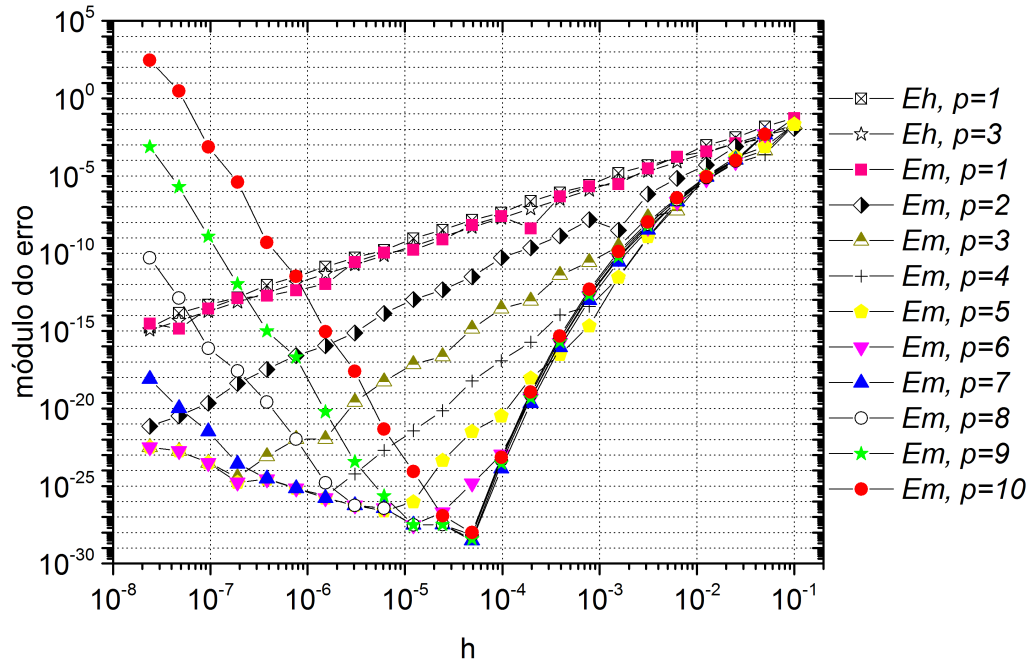


Figura 30 – MER aplicado na variável do tipo III, malha B, variável  $T_{2/3}$ .

#### 4.2.5 Variáveis $x_{max}$ e $T_{max}$

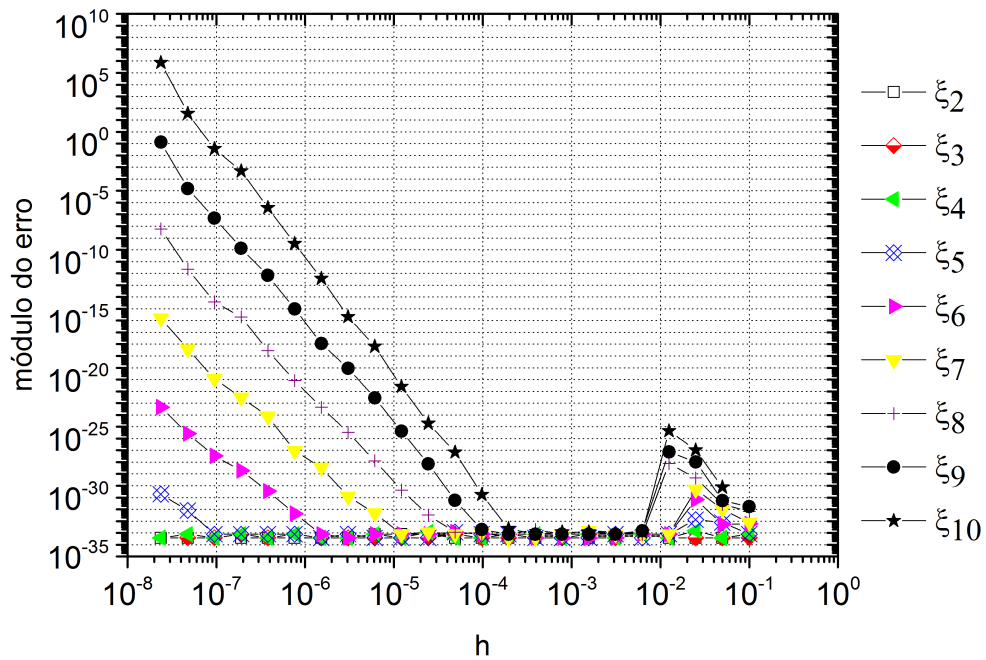
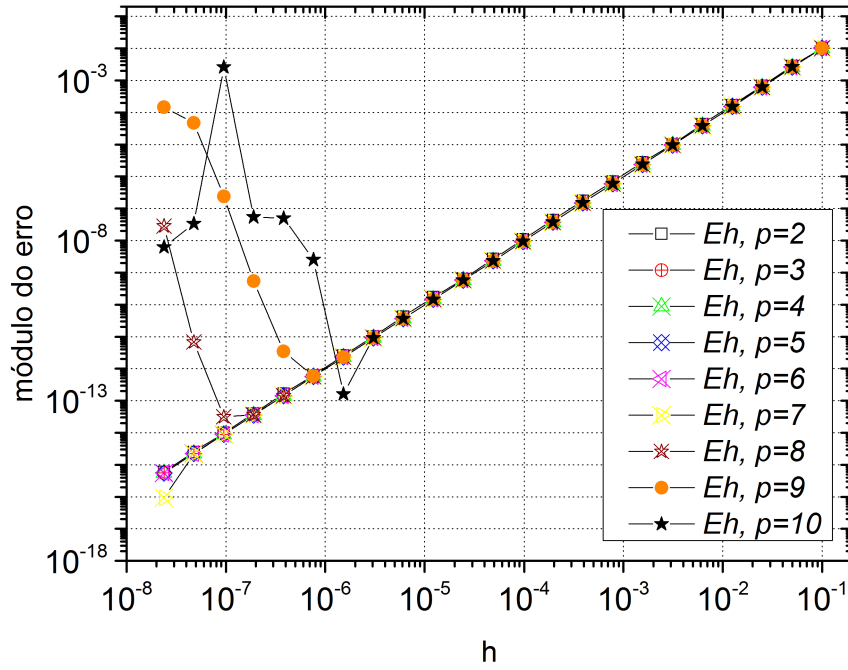
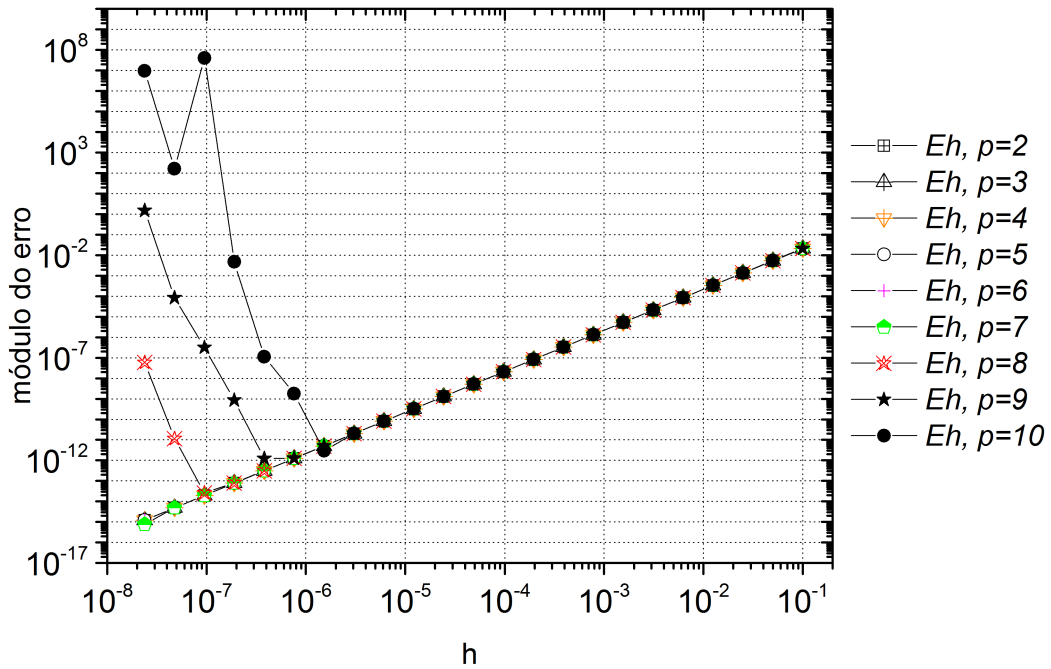


Figura 31 – Erro de interpolação ( $\xi_n$ ), variável  $x_{max}$ , malha B.



(a)  $Eh$ , variável  $x_{max}$ .(b)  $Eh$ , variável  $T_{max}$ .Figura 32 –  $Eh$  das variáveis  $x_{max}$  e  $T_{max}$ , malha B.

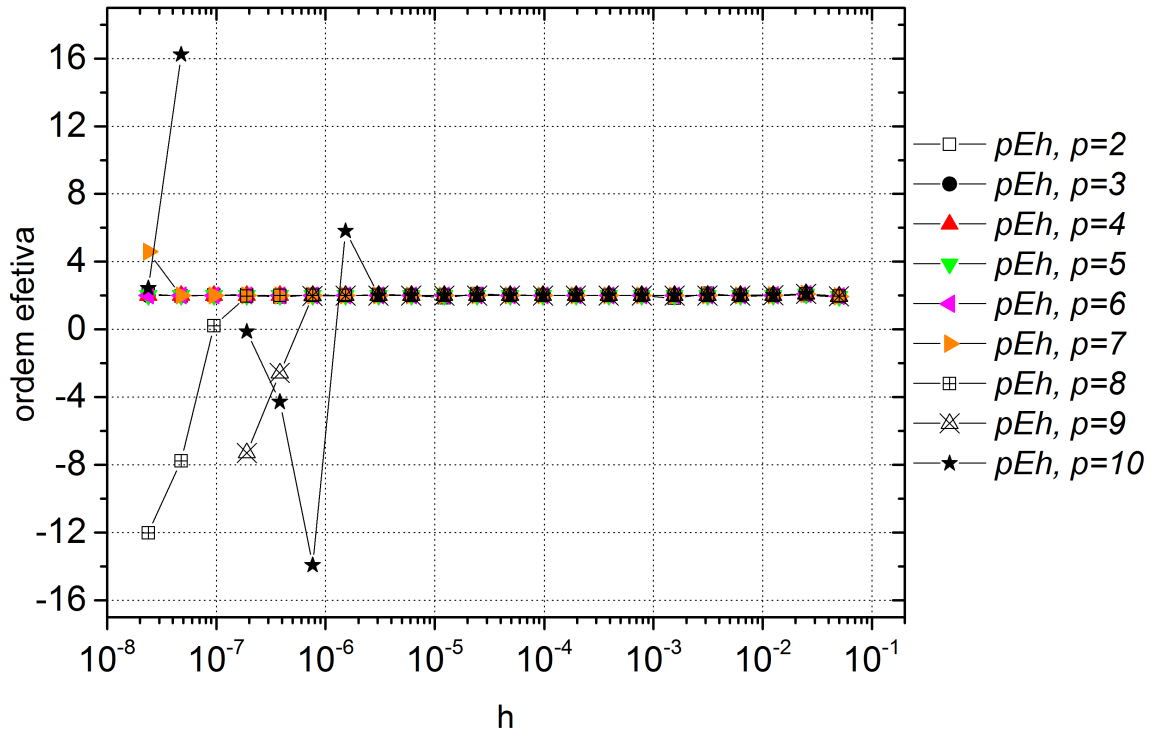
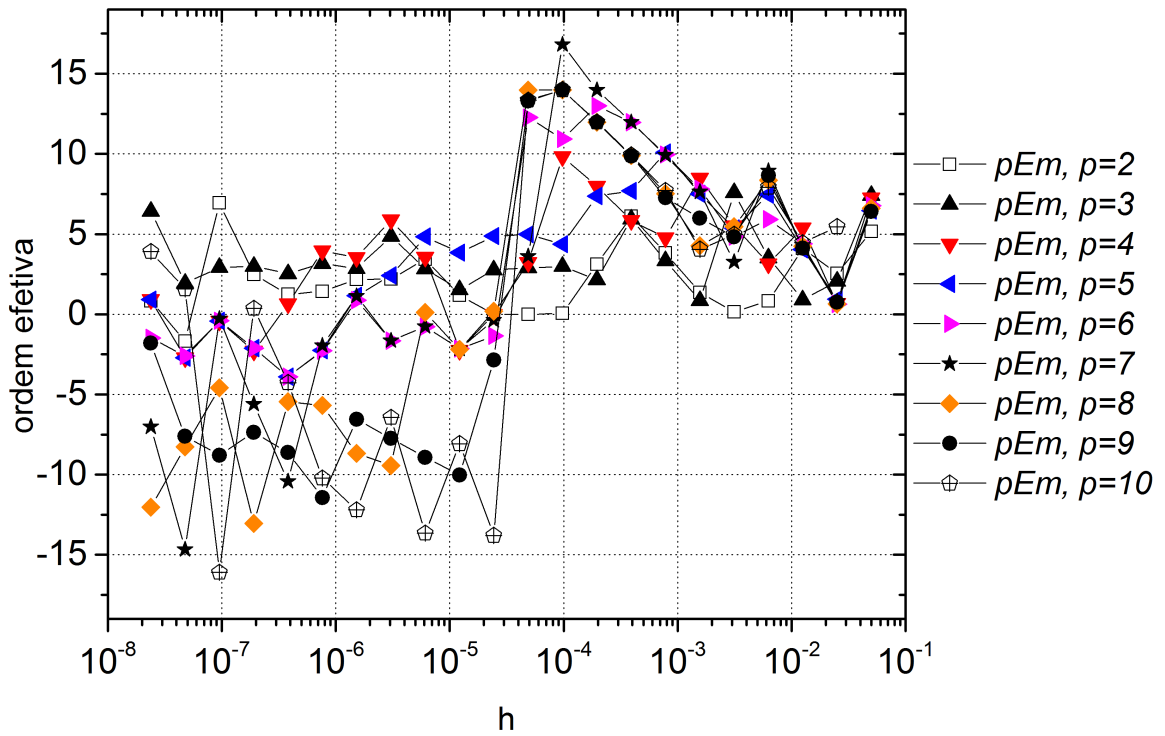
(a)  $pEh$ .(b)  $pEm$ .

Figura 33 – Influência de  $pEh$  em  $pEm$ , aplicado na variável do tipo V, malha B, variável  $x_{max}$ , com o máximo de extrapolações possíveis.

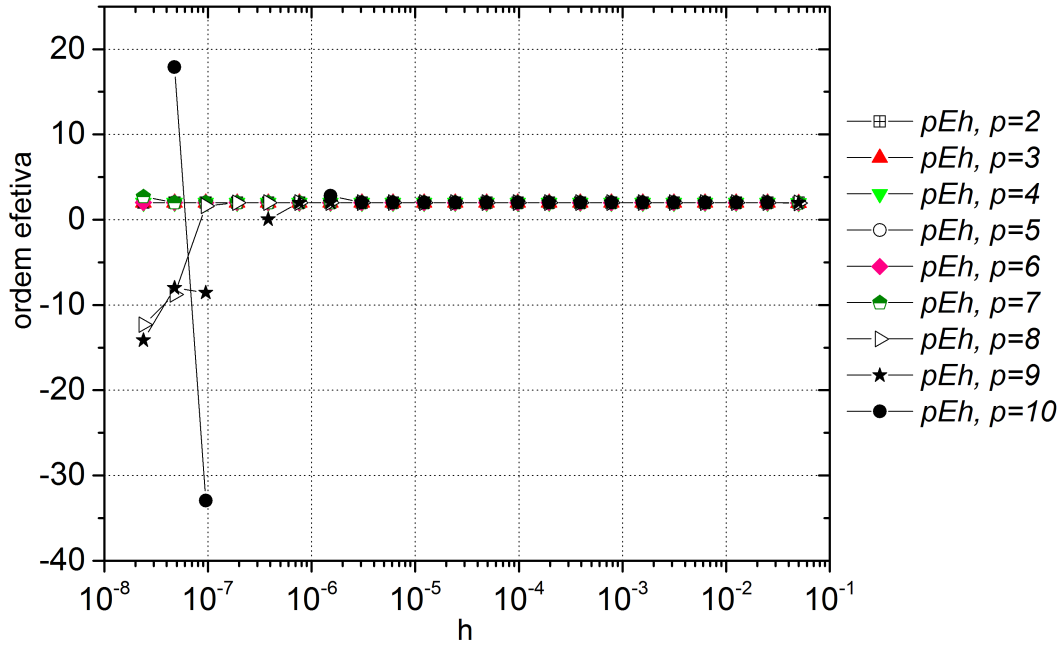
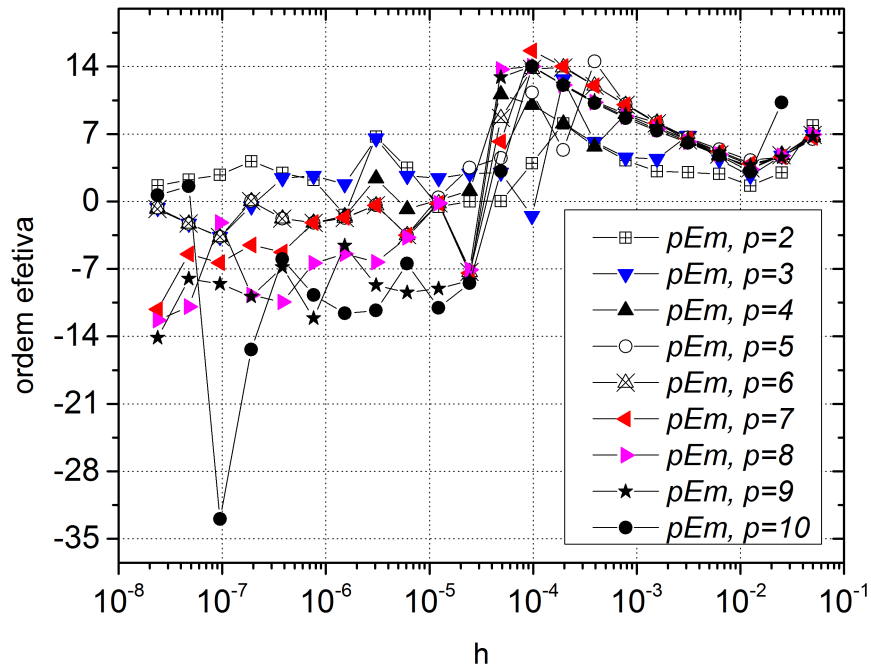
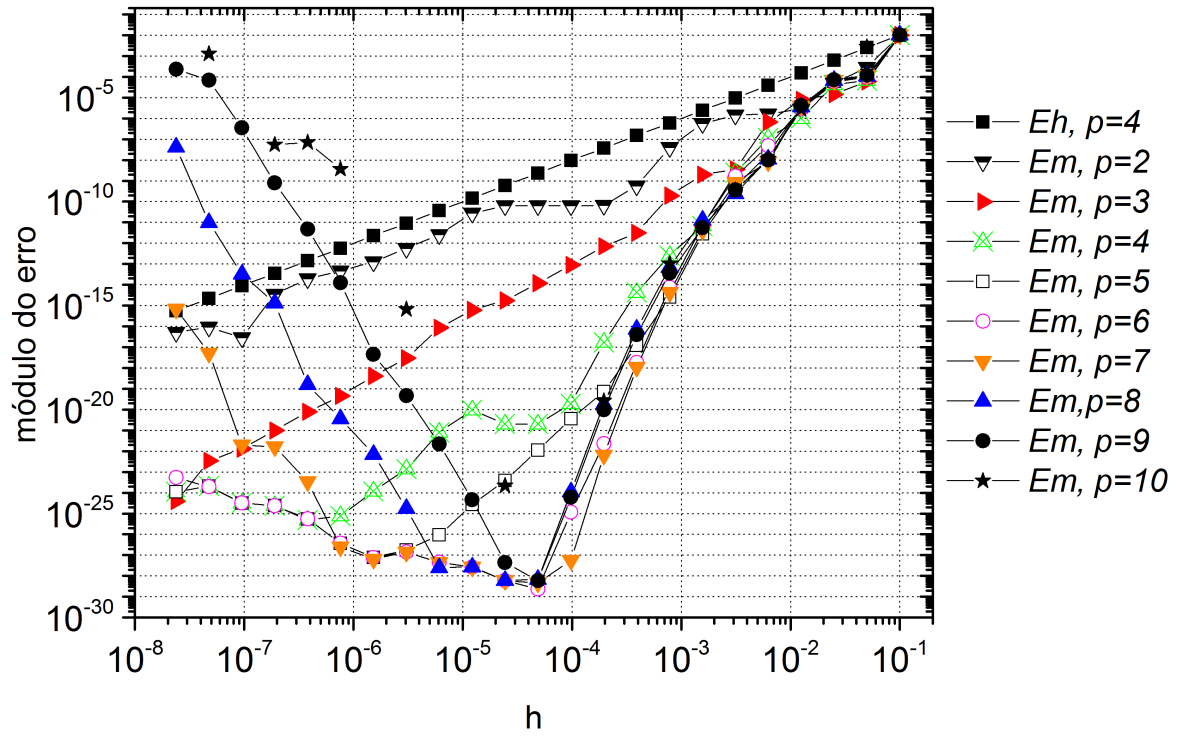
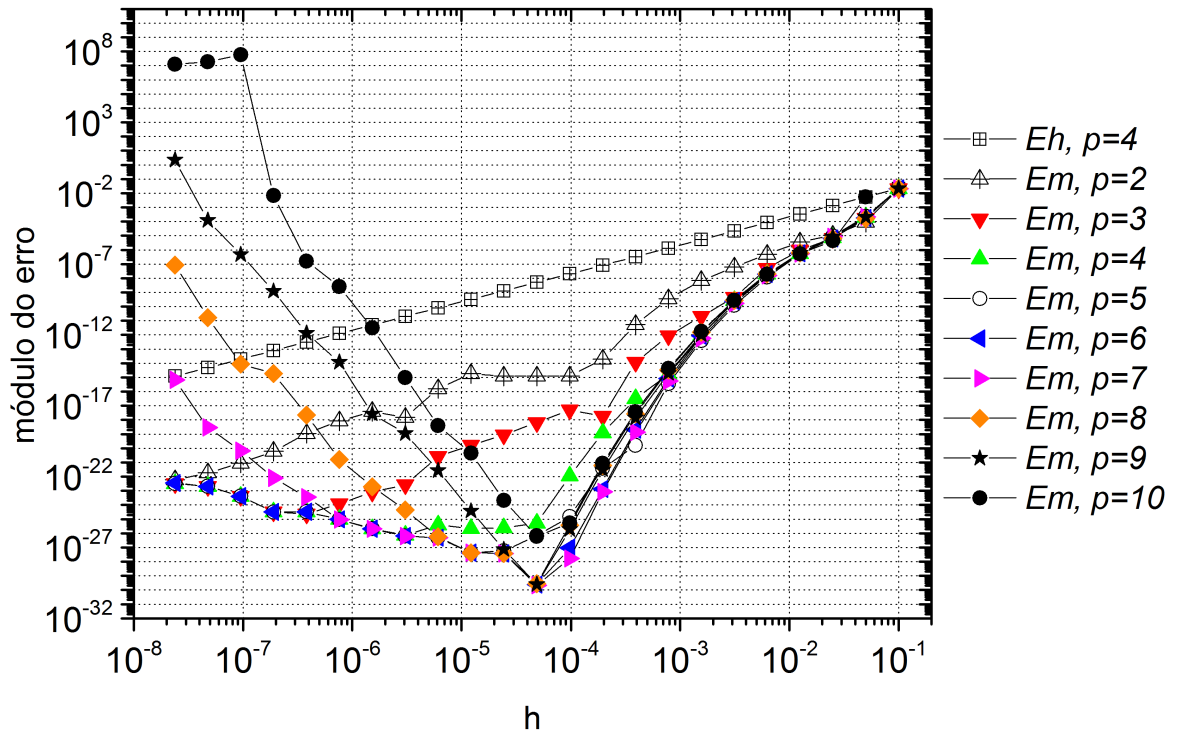
(a)  $pEh$ .(b)  $pEm$ .

Figura 34 – Influência de  $pEh$  em  $pEm$ , aplicado na variável do tipo V, malha B, variável  $T_{max}$ , com o máximo de extrapolações possíveis.

(a)  $Em$ , variável  $x_{max}$ .(b)  $Em$ , variável  $T_{max}$ .Figura 35 – MER aplicado nas variáveis  $x_{max}$  e  $T_{max}$  do tipo V, malha B, com o máximo de extrapolações possíveis.

### 4.3 RESUMO DO CAPÍTULO 4

Neste capítulo foram apresentados resultados do estudo realizado no trabalho. Como conclusão geral dos significativos resultados obtidos, pode-se estender a metodologia abordada na Tabela 3, para o modelo matemático trabalhado aqui, utilizando malhas não uniformes com refino uniforme.

Concluí-se que as variáveis do tipo I funcionaram conforme previsto na literatura, isto é, foram obtidos resultados significativos na redução de  $Eh$ , aplicando MER diretamente. As variáveis do tipo III e V, obtiveram seus melhores resultados com as interpolações de ordens 9 e 10, sendo estas as interpolações de mais alta ordem utilizadas aqui, e neste caso é o grau "máximo possível", conforme Martins (2013) propõe em sua nova metodologia. As interpolações de ordens 1 e 2 tiveram o pior desempenho, mesmo utilizando um número maior de malhas com relação as outras interpolações, este resultado também era previsto por Martins (2013).

Portanto, foram obtidos resultados **qualitativos** com os de Martins (2013), para as variáveis estudadas, neste mesmo problema-modelo com malhas uniformes. Sendo este um resultado **significativo**, porque os resultados obtidos por Martins (2013) são relevantes.

Concluí-se também que ao se utilizar uma malha inicial com mais pontos, MER é mais eficiente, resultado já visto na literatura para malhas uniformes nos trabalhos de Marchi e Giacomini (2014) e Marchi e Germer (2009).

## 5 CONCLUSÃO

O objetivo principal deste trabalho foi alcançado: **contribuir para a superação das dificuldades do emprego de MER em CFD**, em particular para variáveis de interesse que não são do primeiro tipo.

Através deste trabalho foi possível estender os significativos resultados de Martins (2013) para malhas não uniformes. Durante as análises feitas, pode-se verificar que é possível aplicar interpolações de ordens 6 e 7 para variáveis do tipo III e V respectivamente, quando se tem várias malhas à disposição, obtendo resultados similares e para alguns casos até melhores em relação as interpolações de ordens maiores (graus 9 e 10) utilizadas aqui, neste caso o custo computacional é reduzido significativamente.

Além desta observação, foi apresentado uma forma de estimar a acurácia da  $\phi$ , obtida através das interpolações realizadas com as soluções numéricas de cada malha, a estimativa a priori realizada foi obtida por meio das análises do erro de interpolação em cada malha. Embora seja simples a ideia, não foram encontrados na revisão bibliográfica trabalhos que abordem desta forma, este tema. Para malhas não uniformes, segundo Schneider (2007), Marchi (2001) entre outros autores é complicado controlar o erro de discretização para malhas não uniformes, portanto quanto mais ferramentas estiverem disponíveis na literatura, melhor vai ser esse controle.

Para trabalhos futuros (sugestões):

- Trabalhar com a variação da razão de refino ( $r=2,3,...,etc.$ ) das malhas. Trabalho semelhante feito por Marchi e Giacomini (2014) para malhas uniformes, com o objetivo de investigar o desempenho de MER na redução de  $Eh$  nas variáveis de interesse estudadas.
- Trabalhar com o método de discretização em Volumes Finitos.
- Estender os resultados Martins (2013), ou seja trabalhar com modelos bidimensionais não uniformes com o intuito de reduzir e estimar o erro de discretização com MER.

# Referências

- ALVES, C. A. **Verificação de soluções numéricas da equação de Laplace 2D com malhas triangulares e múltiplas extrapolações de Richardson**. Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.
- AMAT, S.; BUSQUIER, S.; LEGAZ, M. J.; MANZANO, F.; RUIZ, J. Reciprocal polynomial extrapolation vs Richardson extrapolation for singular perturbed boundary problems. **Numerical Algorithms**, n. 61, p. 631–647, 2012. Citado na página 23.
- ARAKI, L. K. **Verificação de Soluções Numéricas de Escoamentos Reativos em Motores–foguetes**. Tese de Doutorado em Métodos Numéricos em Engenharia — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, 2007. Citado na página 22.
- BOYCE, W.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 27.
- CHANG, C.; LIN, J.; TSAI, W.; WANG, Y. Using Richardson extrapolation techniques to price american options with alternative stochastic processes. **Review of Quantitative Finance and Accounting**, n. 39, p. 383–406, 2012. Citado na página 23.
- FORTUNA, A. **Técnicas computacionais para dinâmica de fluidos**. São Paulo: EDUSP, 2000. Citado 5 vezes nas páginas 18, 20, 21, 22 e 27.
- FRANCO, N. B. **Cálculo Numérico**. 1. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007. Citado 4 vezes nas páginas 29, 30, 32 e 40.
- MALISKA, C. R. **Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004. Citado 4 vezes nas páginas 20, 21, 26 e 27.
- MARCHI, C. H. **Verificação de soluções numéricas unidimensionais em dinâmica de fluidos**. Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, 2001. Citado 20 vezes nas páginas 8, 18, 19, 21, 22, 27, 28, 29, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 40, 41, 47, 49, 52 e 77.
- MARCHI, C. H.; GERMER, E. M. Verificação de esquemas advectivo-difusivos 1D com e sem multiextrapolação de Richardson. **Proceedings of the XXX Iberian Latin American Congress on the Computational Methods in Engineering (CILAMCE)**, Armação dos Búzios, Brasil, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 76.
- MARCHI, C. H.; GIACOMINI, F. F. Efeito da razão de refino de malha sobre o uso de multiextrapolação de Richardson em CFD. **XXXV Congresso nacional de matemática aplicada e computacional**, Natal, Brasil, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 23, 76 e 77.
- MARCHI, C. H.; NOVAK, L. A.; COSMO, D. S.; VARGAS, A. P. S. Highly accurate numerical solutions with repeated Richardson extrapolation for 2D Laplace equation. **Applied Mathematical Modelling**, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 8, 9, 49 e 85.

- MARTINS, M. A. **Multiextrapolação de Richardson com interpolação para reduzir e estimar o erro de discretização em CFD**. Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, 2013. Citado 29 vezes nas páginas 8, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 30, 32, 37, 38, 39, 40, 41, 43, 44, 45, 47, 49, 55, 61, 63, 76, 77, 140, 141, 149 e 150.
- MARTINS, M. A.; MARCHI, C. H. Estimate of iteration errors in computational fluid dynamics. **Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals**, v. 53, n. 3, p. 234–245, 2008. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1080/10580530701790142>>. Citado na página 34.
- MARTINS, M. A.; MARCHI, C. H.; NOVAK, L. A.; ARAKI, L. K.; PINTO, M. A. V.; GONÇALVES, S. F. T. Multiextrapolação de Richardson com interpolação para reduzir o erro de discretização em CFD. **Congresso de matemática aplicada e computacional sudeste**, Bauru, Brasil, 2013. Citado 5 vezes nas páginas 8, 10, 43, 44 e 49.
- MUNYAKAZI, J. B.; PATIDAR, K. C. On richardson extrapolation for fitted operator finite difference methods. **Applied Mathematics and Computation**, n. 201, p. 465–480, 2008. Citado na página 23.
- OBERKAMPF, W. L.; TIMOTHY, T. G. Verification and validation in computational fluid dynamics. **Progress in Aerospace Sciences**, n. 38, p. 209–272, 2002. Citado na página 22.
- RIBEIRO, A. A.; KARAS, E. W. **Otimização contínua: aspectos teóricos e computacionais**. São Paulo: Cengage Learning, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 40.
- RICHARDSON, L. F. The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equation, with an application to the stresses in a masonry dam. **Phylosophical Proceedings of the Royal Society of London**, v. 210, Serial A, p. 307–357, 1910. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.
- RICHARDSON, L. F.; GAUNT, J. A. The differed approach to the limit. **Phylosophical Proceedings of the Royal Society of London**, v. 226, Serial A, p. 229–361, 1927. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.
- ROY, J. Review of code and solution verification procedures for computational simulation. **Journal of Computational Physics**, n. 205, p. 131–156, 2005. Citado na página 22.
- ROY, J. C.; BLOTTNER, F. G. Review and assessment of turbulence models hypersonic. **Progress in Aerospace Sciences**, n. 42, p. 469–530, 2006. Citado na página 22.
- SCHNEIDER, F. A. **Verificação de Soluções Numéricas em Problemas Difusivos e Advectivos com Malhas não Uniformes**. Tese de Doutorado em Métodos Numéricos em Engenharia — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, 2007. Citado 14 vezes nas páginas 8, 19, 21, 22, 23, 24, 32, 33, 37, 40, 41, 44, 47 e 77.
- STEFFENSEN, J. F. **Interpolation**. 2. ed. New York: Chelsea Publishing Company, 1950. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 40.



VARGAS, A. P. S. **Multiextrapolação de Richardson e esquemas de 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> ordens, mistos e Crank–Nicolson sobre as equações 2D de Advecção–Difusão e Fourier**. Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, 2013. Citado 6 vezes nas páginas 23, 32, 37, 38, 39 e 40.

## Apêndices

# APÊNDICE A – RESULTADOS ADICIONAIS

Neste primeiro apêndice é apresentado como foram obtidas as soluções numéricas de forma breve e resumida, espera-se que o leitor possua conhecimento básico do método de Diferenças Finitas. São apresentadas também as tabelas referentes aos experimentos realizados.

A obtenção das soluções numéricas para as variáveis  $x_{max}$ ,  $T_{max}$  e  $T_{2/3}$  são apresentadas no apêndice B.

## A.1 OBTENÇÃO DAS SOLUÇÕES NUMÉRICAS

### A.1.1 Discretização do modelo

Para resolver o modelo matemático apresentado na Seção 3.3:

$$\begin{cases} \frac{d^2T}{dx^2} = \frac{-9}{5}e^{3x} & x \in \Omega[0, 1] \\ T(0) = \frac{9}{5} ; T(1) = \frac{-e^3}{5} + 5 \end{cases} . \quad (\text{A.1})$$

Conforme comentado anteriormente, emprega-se o método de Diferenças Finitas (Seção 2.2), utilizando uma aproximação do tipo CDS, para aproximar a derivada de segunda ordem. Com esta aproximação, apresentada na Seção 2.2.2, pode-se reescrever a equação (A.1) das seguintes formas, para os contornos internos:

$$2 \frac{[h_{j+1}T_{j-1} + h_jT_{j+1} - (h_j + h_{j+1})T_j]}{(h_j + h_{j+1})h_jh_{j+1}} = \frac{-9}{5}e^{3x_j} \quad (\text{A.2})$$

ou

$$T_j = \frac{h_{j+1}}{(h_j + h_{j+1})}T_{j-1} + \frac{h_j}{(h_j + h_{j+1})}T_{j+1} + h_jh_{j+1}\frac{9}{10}e^{3x_j}. \quad (\text{A.3})$$

Portanto da equação (A.3), obtêm-se os elementos do contorno **interno** da discretização:

$$a_w = \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}}, \quad (\text{A.4})$$

$$a_e = \frac{h_j}{(h_j + h_{j+1})}, \quad (\text{A.5})$$

$$a_p = 1 \quad (\text{A.6})$$

e

$$b_p = h_jh_{j+1}\frac{9}{10}e^{3x_j}. \quad (\text{A.7})$$

Falta agora os contornos esquerdo e direito:

- Contorno **esquerdo**

$$a_w = 0; \quad (\text{A.8})$$

$$a_e = 0; \quad (\text{A.9})$$

$$a_p = 1; \quad (\text{A.10})$$

$$b_p = \frac{9}{5}. \quad (\text{A.11})$$

- Contorno **direito**

$$a_w = 0; \quad (\text{A.12})$$

$$a_e = 0; \quad (\text{A.13})$$

$$a_p = 1; \quad (\text{A.14})$$

$$b_p = -\frac{1}{5}e^3 + 5. \quad (\text{A.15})$$

Com a discretização do modelo matemático, obtendo os elementos do contorno interno, direito e esquerdo, aplicou-se o método TDMA, para resolver o sistema linear tridiagonal, gerado desta discretização. As malhas utilizadas são as apresentadas nas seções 3.1.1 e 3.3.

### A.1.2 Obtenção numérica das variáveis $T_{P_i}$

Para determinar a posição das temperaturas correspondentes as suas coordenadas nodais  $P_i$  da malha inicial, podem ser feitas através do algoritmo:

$$N1 = 2^{k-1}n \quad (n \geq 4)$$

Para  $i = 1, 2, \dots, n - 1$

Escreva  $T(i \cdot N1)$

As constantes  $k$  e  $n$  são da equação (3.4), onde  $k$  corresponde à quantidade de refinamentos sobre a malha inicial e  $n$  é a dimensão do vetor  $h$  da malha inicial, sendo que para  $k = 1$  corresponde a malha inicial.

### A.1.3 Obtenção numérica da variável $T_m$

A obtenção da temperatura média em cada malha ( $T_m$ ) é obtida através da equação apresentada na Seção 2.2.3:

$$T_m = \frac{1}{L} \int_0^L T dx \approx \frac{1}{2L} \sum_{j=1}^N h_j (T_{j-1} + T_j)$$

com  $L = 1$  e  $N$  corresponde ao número de nós da malha.

#### A.1.4 Obtenção numérica da inclinação

As inclinações são obtidas com aproximações do tipo DDS-2 e UDS-2 (Seção 2.2.1):

$$\left( \frac{dT}{dx} \right)_{x=0} \approx (T_{\text{DDS-2}}^i)_0 = \frac{[(1+r_0)^2 T_1 - (2+r_0)r_0 T_0 - T_2]}{r_0(1+r_0)h_1}, \quad (\text{A.16})$$

$$\left( \frac{dT}{dx} \right)_{x=1} \approx (T_{\text{UDS-2}}^i)_1 = \frac{[-(1+r_1)^2 T_{n-1} + (2+r_1)r_1 T_n - T_{n-2}]}{r_1(1+r_1)h_n} \quad (\text{A.17})$$

onde

$$r_1 = \frac{h_{n-1}}{h_n} \text{ e } r_0 = \frac{h_2}{h_1}. \quad (\text{A.18})$$

## A.2 RESULTADOS DA MALHA A

Denota-se por malha 1, a malha inicial (malha A), as seguintes são resultantes do refino a partir desta malha, conforme explicado na Seção 3.1.1. A equação (3.4) que serve para determinar a quantidade de nós da malha é reescrita da seguinte forma:

$$2^{k-1}n + 1 \quad (k \geq 1), \quad (\text{A.19})$$

onde  $k$  representa a quantidade de refinamento da malha inicial e  $n$  o número de nós da malha inicial. Agora para  $k = 1$ , da equação (A.19), obtém-se a quantidade de nós da malha inicial. Esta mesma analogia é feita para a próxima seção.

O eixo horizontal dos gráficos apresentados neste trabalho e tabelas, isto é a constante  $h$ , equivale a média necessária de espaçamento entre os nós, para realizar a discretização do modelo matemático, ou seja é equivalente ao espaçamento uniforme ( $h$ ), empregado para malhas uniformes no MDF para discretizar o intervalo  $\Omega[0, 1]$ . Portanto o  $h$  de cada malha  $k$ , da Eq. (A.19) é dada pela fórmula:

$$h = \frac{1}{2^{k-1}n + 1}; \quad \text{Malha } k \quad (k \geq 1). \quad (\text{A.20})$$

Para obter as soluções analíticas exatas das variáveis de interesse, basta utilizar a solução analítica fabricada, do modelo matemático proposto da Seção 3.3:

$$T(x) = -\frac{1}{5}e^{3x} + 3x + 2 \quad x \in \Omega[0, 1]. \quad (\text{A.21})$$



Para implementar MER, recomenda-se utilizar o algoritmo exposto na Seção 2.6. Os espaços em branco nas tabelas significam que a solução não pode ser obtida na malha em questão, as notações utilizadas aqui, caso exista alguma dúvida em seu significado, podem ser encontradas na lista de símbolos no começo deste trabalho.

### A.2.1 Coordenada nodal $T(P_1)$ , $P_1 = 0,35$

Tabela 6 – Resultados,  $T(P_1)$ ,  $P_1 = 0,35$ , malha A.

$h$	$Eh$	$Em$	$pEh$	$pEm$
3,33330E-01	2,13092E-01	2,13092E-01		
1,66670E-01	5,73952E-02	5,49612E-03	1,89248E+00	5,27692E+00
8,33330E-02	1,46279E-02	3,05844E-05	1,97220E+00	7,48947E+00
4,16670E-02	3,67479E-03	3,76481E-08	1,99299E+00	9,66600E+00
2,08330E-02	9,19817E-04	1,07323E-11	1,99824E+00	1,17764E+01
1,04170E-02	2,30024E-04	7,28158E-16	1,99956E+00	1,38473E+01
5,20830E-03	5,75104E-05	1,19467E-20	1,99989E+00	1,58953E+01
2,60420E-03	1,43779E-05	4,78535E-26	1,99997E+00	1,79296E+01
1,30210E-03	3,59449E-06	-1,79420E-30	1,99999E+00	1,47030E+01
6,51040E-04	8,98623E-07	-1,07852E-30	2,00000E+00	7,34284E-01
3,25520E-04	2,24656E-07	-1,00684E-29	2,00000E+00	-3,22271E+00
1,62760E-04	5,61639E-08	-1,94057E-30	2,00000E+00	2,37528E+00
8,13800E-05	1,40410E-08	-5,04651E-29	2,00000E+00	-4,70074E+00
4,06900E-05	3,51025E-09	4,94660E-29	2,00000E+00	2,88509E-02
2,03450E-05	8,77562E-10	-1,32743E-28	2,00000E+00	-1,42413E+00
1,01730E-05	2,19390E-10	1,56827E-27	2,00000E+00	-3,56246E+00
5,08630E-06	5,48476E-11	-5,88095E-27	2,00000E+00	-1,90688E+00
2,54310E-06	1,37119E-11	-1,13003E-26	2,00000E+00	-9,42238E-01
1,27160E-06	3,42797E-12	4,16190E-26	2,00000E+00	-1,88088E+00
6,35780E-07	8,56994E-13	1,47619E-25	2,00000E+00	-1,82656E+00
3,17890E-07	2,14248E-13	4,67688E-25	2,00000E+00	-1,66367E+00
1,58950E-07	5,35621E-14	-3,62841E-25	2,00000E+00	3,66209E-01
7,94730E-08	1,33905E-14	-2,39515E-23	2,00000E+00	-6,04464E+00
3,97360E-08	3,34763E-15	-3,71954E-23	2,00000E+00	-6,35005E-01
1,98680E-08	8,36908E-16	-7,21769E-23	2,00000E+00	-9,56414E-01

A.2.2 Coordenada nodal  $T(P_2)$ ,  $P_2 = 0,5$ Tabela 7 – Resultados,  $T(P_2)$ ,  $P_2 = 0,5$ , malha A.

$h$	$Eh$	$Em$	$pEh$	$pEm$
3,33330E-01	3,31729E-01	3,31729E-01		
1,66670E-01	8,90299E-02	8,13031E-03	1,89764E+00	5,35055E+00
8,33330E-02	2,26698E-02	4,43802E-05	1,97352E+00	7,51725E+00
4,16670E-02	5,69374E-03	5,41732E-08	1,99332E+00	9,67812E+00
2,08330E-02	1,42509E-03	1,53843E-11	1,99833E+00	1,17819E+01
1,04170E-02	3,56375E-04	1,04193E-15	1,99958E+00	1,38499E+01
5,20830E-03	8,91003E-05	1,70802E-20	1,99990E+00	1,58966E+01
2,60420E-03	2,22755E-05	6,83879E-26	1,99997E+00	1,79302E+01
1,30210E-03	5,56889E-06	-1,86700E-30	1,99999E+00	1,51607E+01
6,51040E-04	1,39223E-06	-1,54960E-30	2,00000E+00	2,68820E-01
3,25520E-04	3,48056E-07	-6,52621E-30	2,00000E+00	-2,07435E+00
1,62760E-04	8,70141E-08	-1,58966E-30	2,00000E+00	2,03752E+00
8,13800E-05	2,17535E-08	-1,72941E-29	2,00000E+00	-3,44349E+00
4,06900E-05	5,43838E-09	1,18900E-28	2,00000E+00	-2,78140E+00
2,03450E-05	1,35960E-09	-3,39096E-28	2,00000E+00	-1,51194E+00
1,01730E-05	3,39899E-10	1,62982E-27	2,00000E+00	-2,26495E+00
5,08630E-06	8,49747E-11	-6,94518E-27	2,00000E+00	-2,09130E+00
2,54310E-06	2,12437E-11	-1,19317E-26	2,00000E+00	-7,80713E-01
1,27160E-06	5,31092E-12	4,49312E-26	2,00000E+00	-1,91292E+00
6,35780E-07	1,32773E-12	1,40864E-25	2,00000E+00	-1,64851E+00
3,17890E-07	3,31932E-13	5,76011E-25	2,00000E+00	-2,03179E+00
1,58950E-07	8,29831E-14	-6,52476E-25	2,00000E+00	-1,79830E-01
7,94730E-08	2,07458E-14	-2,94075E-23	2,00000E+00	-5,49412E+00
3,97360E-08	5,18645E-15	-3,83303E-23	2,00000E+00	-3,82298E-01
1,98680E-08	1,29661E-15	-8,03992E-23	2,00000E+00	-1,06870E+00



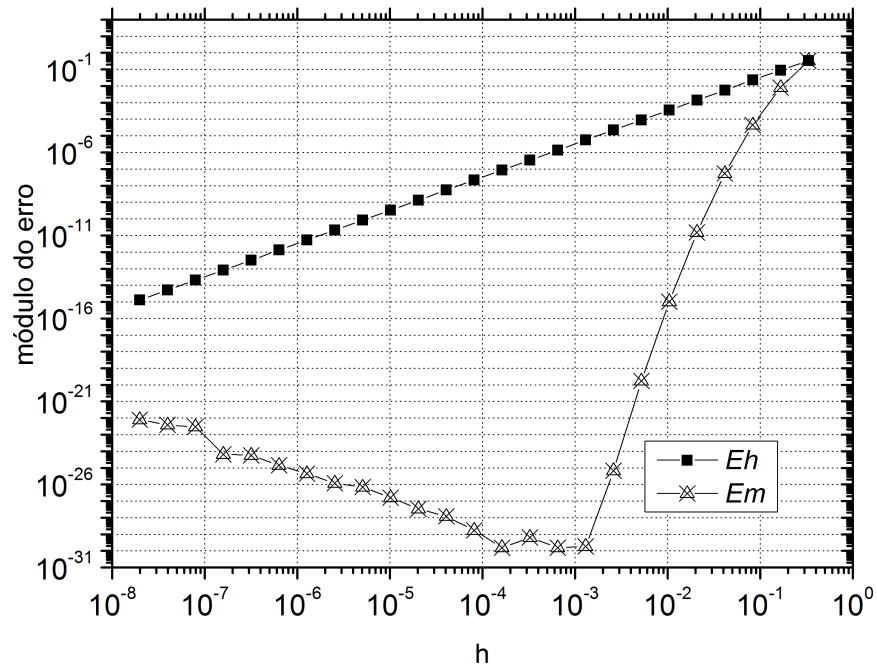
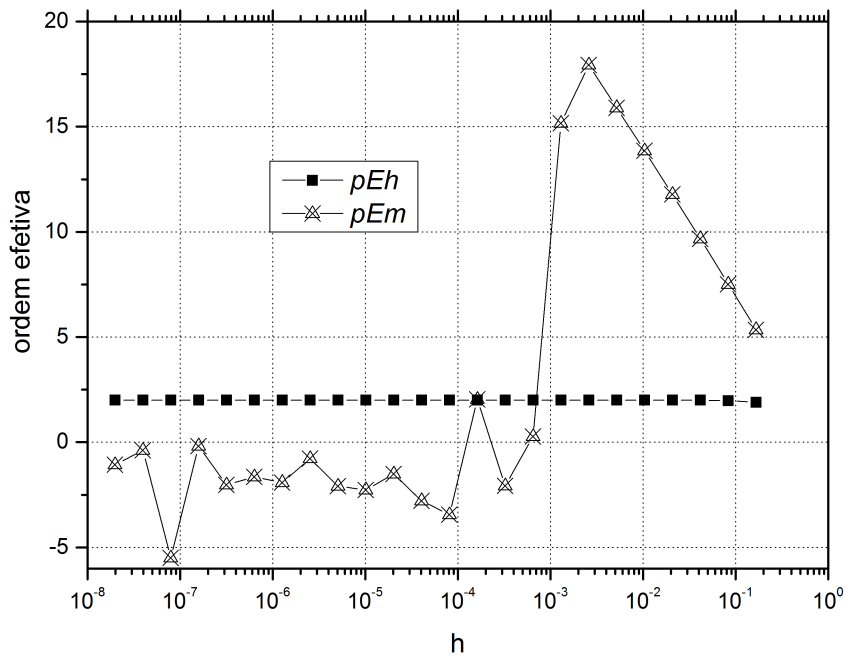
(a)  $Eh$  e  $Em$ .(b)  $pEh$  e  $pEm$ .

Figura 37 – MER aplicado em variável do tipo I, malha A, variável  $T_{P_2}$ , com 25 extrapolações.

## A.2.3 Temperatura média

Tabela 8 – Resultados, Temperatura média ( $T_m$ ), malha A.

$h$	$ Eh$	$ Em$	$ pEh$	$ pEm$
3,33330E-01	3,62185E-01	3,62185E-01		
1,66670E-01	1,01450E-01	1,45379E-02	1,83596E+00	4,63883E+00
8,33330E-02	2,61203E-02	1,08634E-04	1,95752E+00	7,06420E+00
4,16670E-02	6,57874E-03	1,68116E-07	1,98929E+00	9,33580E+00
2,08330E-02	1,64775E-03	5,78625E-11	1,99732E+00	1,15045E+01
1,04170E-02	4,12129E-04	4,60769E-15	1,99933E+00	1,36163E+01
5,20830E-03	1,03044E-04	8,68698E-20	1,99983E+00	1,56948E+01
2,60420E-03	2,57618E-05	3,93328E-25	1,99996E+00	1,77528E+01
1,30210E-03	6,44050E-06	-7,04505E-31	1,99999E+00	1,90907E+01
6,51040E-04	1,61013E-06	-8,37780E-31	2,00000E+00	-2,4960E-01
3,25520E-04	4,02532E-07	-4,72045E-30	2,00000E+00	-2,49428E+00
1,62760E-04	1,00633E-07	-3,07956E-30	2,00000E+00	6,16201E-01
8,13800E-05	2,51583E-08	-1,94334E-29	2,00000E+00	-2,65774E+00
4,06900E-05	6,28957E-09	6,37976E-29	2,00000E+00	-1,71496E+00
2,03450E-05	1,57239E-09	-1,54302E-28	2,00000E+00	-1,27419E+00
1,01730E-05	3,93098E-10	9,42792E-28	2,00000E+00	-2,61118E+00
5,08630E-06	9,82745E-11	-3,86789E-27	2,00000E+00	-2,03654E+00
2,54310E-06	2,45686E-11	-6,28381E-27	2,00000E+00	-7,00093E-01
1,27160E-06	6,14215E-12	2,69195E-26	2,00000E+00	-2,09894E+00
6,35780E-07	1,53554E-12	8,84372E-26	2,00000E+00	-1,71600E+00
3,17890E-07	3,83885E-13	3,53583E-25	2,00000E+00	-1,99933E+00
1,58950E-07	9,59712E-14	-2,54810E-25	2,00000E+00	4,72629E-01
7,94730E-08	2,39928E-14	-1,58361E-23	2,00000E+00	-5,95765E+00
3,97360E-08	5,99820E-15	-2,38866E-23	2,00000E+00	-5,92991E-01
1,98680E-08	1,49955E-15	-5,05776E-23	2,00000E+00	-1,08229E+00

A.2.4 Inclinação  $\left(\frac{dT}{dx}\right)\big|_x$ A.2.4.1 Inclinação,  $x = 0$ Tabela 9 – Resultados, Inclinação,  $x = 0$ , malha A.

$h$	$Em$	$Em$	$pEm$	$pEm$
3,33330E-01	1,70190E-01	1,70190E-01		
1,66670E-01	9,30066E-02	6,72788E-02	8,71743E-01	1,33893E+00
8,33330E-02	2,76710E-02	-2,87697E-03	1,74896E+00	4,54753E+00
4,16670E-02	7,36057E-03	1,36432E-05	1,91049E+00	7,72023E+00
2,08330E-02	1,88892E-03	1,70655E-08	1,96226E+00	9,64288E+00
1,04170E-02	4,77924E-04	8,08214E-10	1,98271E+00	4,40020E+00
5,20830E-03	1,20168E-04	-1,96166E-12	1,99173E+00	8,68652E+00
2,60420E-03	3,01263E-05	-7,19208E-16	1,99596E+00	1,14134E+01
1,30210E-03	7,54203E-06	7,92907E-19	1,99800E+00	9,82504E+00
6,51040E-04	1,88681E-06	1,27814E-22	1,99901E+00	1,25989E+01
3,25520E-04	4,71864E-07	-2,79951E-26	1,99950E+00	1,21566E+01
1,62760E-04	1,17986E-07	-5,00303E-29	1,99975E+00	9,12816E+00
8,13800E-05	2,94991E-08	-3,16993E-28	1,99988E+00	-2,66358E+00
4,06900E-05	7,37509E-09	-1,12621E-28	1,99994E+00	1,49298E+00
2,03450E-05	1,84381E-09	-6,39775E-28	1,99997E+00	-2,50609E+00
1,01730E-05	4,60958E-10	6,38074E-27	1,99998E+00	-3,31809E+00
5,08630E-06	1,15240E-10	-2,11522E-26	1,99999E+00	-1,72901E+00
2,54310E-06	2,88101E-11	-3,71898E-26	2,00000E+00	-8,14098E-01
1,27160E-06	7,20253E-12	1,69717E-25	2,00000E+00	-2,19015E+00
6,35780E-07	1,80063E-12	5,27836E-25	2,00000E+00	-1,63696E+00
3,17890E-07	4,50159E-13	2,05594E-24	2,00000E+00	-1,96164E+00
1,58950E-07	1,12540E-13	1,23993E-24	2,00000E+00	7,29539E-01
7,94730E-08	2,81349E-14	-7,29184E-23	2,00000E+00	-5,87795E+00
3,97360E-08	7,03373E-15	-9,98389E-23	2,00000E+00	-4,53319E-01
1,98680E-08	1,75843E-15	-2,59353E-22	2,00000E+00	-1,37724E+00

A.2.4.2 Inclinação,  $x = 1$ Tabela 10 – Resultados, Inclinação,  $x = 1$ , malha A.

$h$	$Eh$	$Em$	$pEh$	$pEm$
3,33330E-01	-4,45648E+00	-4,45648E+00		
1,66670E-01	-1,71836E+00	-8,05656E-01	1,37487E+00	2,46767E+00
8,33330E-02	-5,38420E-01	-5,07415E-02	1,67423E+00	3,98892E+00
4,16670E-02	-1,51013E-01	-1,17508E-03	1,83406E+00	5,43234E+00
2,08330E-02	-4,00086E-02	-1,10389E-05	1,91629E+00	6,73402E+00
1,04170E-02	-1,02979E-02	-4,55110E-08	1,95796E+00	7,92217E+00
5,20830E-03	-2,61234E-03	-8,24787E-11	1,97893E+00	9,10798E+00
2,60420E-03	-6,57875E-04	-6,20989E-14	1,98946E+00	1,03752E+01
1,30210E-03	-1,65071E-04	-1,92813E-17	1,99473E+00	1,16531E+01
6,51040E-04	-4,13434E-05	-2,90709E-21	1,99736E+00	1,26953E+01
3,25520E-04	-1,03453E-05	-2,43489E-25	1,99868E+00	1,35434E+01
1,62760E-04	-2,58751E-06	1,22874E-29	1,99934E+00	1,42744E+01
8,13800E-05	-6,47025E-07	2,56919E-29	1,99967E+00	-1,06413E+00
4,06900E-05	-1,61775E-07	-5,53572E-28	1,99984E+00	-4,42939E+00
2,03450E-05	-4,04460E-08	1,88230E-27	1,99992E+00	-1,76565E+00
1,01730E-05	-1,01118E-08	-3,17348E-27	1,99996E+00	-7,53571E-01
5,08630E-06	-2,52798E-09	1,86572E-26	1,99998E+00	-2,55560E+00
2,54310E-06	-6,32000E-10	1,82753E-26	1,99999E+00	2,98401E-02
1,27160E-06	-1,58001E-10	-1,63623E-25	1,99999E+00	-3,16241E+00
6,35780E-07	-3,95002E-11	-3,82119E-25	2,00000E+00	-1,22365E+00
3,17890E-07	-9,87506E-12	-1,85109E-24	2,00000E+00	-2,27628E+00
1,58950E-07	-2,46877E-12	1,69907E-24	2,00000E+00	1,23635E-01
7,94730E-08	-6,17192E-13	7,16157E-23	2,00000E+00	-5,39746E+00
3,97360E-08	-1,54298E-13	1,34069E-22	2,00000E+00	-9,04631E-01
1,98680E-08	-3,85745E-14	2,34216E-22	2,00000E+00	-8,04859E-01

### A.2.5 Variável $T_{2/3}$

Tabela 11 – módulo de  $Eh$ , variável  $T_{2/3}$ , malha A.

$h$	$Eh, p = 1$	$Eh, p = 2$	$Eh, p = 3$	$Eh, p = 4$	$Eh, p = 5$	$Eh, p = 6$	$Eh, p = 7$	$Eh, p = 8$	$Eh, p = 9$	$Eh, p = 10$
3,333E-01	6,799E-01	4,559E-01								
1,667E-01	1,623E-01	4,375E-02								
8,333E-02	4,432E-02	2,394E-02	1,982E-02	2,004E-02	1,942E-02	1,977E-02	1,908E-02			
4,167E-02	1,078E-02	4,634E-03	5,197E-03	5,141E-03	5,138E-03	5,138E-03	5,144E-03	5,141E-03	5,159E-03	5,152E-03
2,083E-02	2,743E-03	1,345E-03	1,284E-03	1,286E-03	1,286E-03	1,286E-03	1,286E-03	1,286E-03	1,286E-03	1,286E-03
1,042E-02	6,805E-04	3,140E-04	3,218E-04	3,216E-04	3,216E-04	3,216E-04	3,216E-04	3,216E-04	3,216E-04	3,216E-04
5,208E-03	1,708E-04	8,134E-05	8,039E-05	8,040E-05	8,040E-05	8,040E-05	8,040E-05	8,040E-05	8,040E-05	8,040E-05
2,604E-03	4,262E-05	1,998E-05	2,010E-05	2,010E-05	2,010E-05	2,010E-05	2,010E-05	2,010E-05	2,010E-05	2,010E-05
1,302E-03	1,067E-05	5,040E-06	5,025E-06	5,025E-06	5,025E-06	5,025E-06	5,025E-06	5,025E-06	5,025E-06	5,025E-06
6,510E-04	2,665E-06	1,254E-06	1,256E-06	1,256E-06	1,256E-06	1,256E-06	1,256E-06	1,256E-06	1,256E-06	1,256E-06
3,255E-04	6,665E-07	3,143E-07	3,141E-07	3,141E-07	3,141E-07	3,141E-07	3,141E-07	3,141E-07	3,141E-07	3,141E-07
1,628E-04	1,666E-07	7,849E-08	7,852E-08	7,852E-08	7,852E-08	7,852E-08	7,852E-08	7,852E-08	7,852E-08	7,852E-08
8,138E-05	4,165E-08	1,963E-08	1,963E-08	1,963E-08	1,963E-08	1,963E-08	1,963E-08	1,963E-08	1,963E-08	1,963E-08
4,069E-05	1,041E-08	4,907E-09	4,907E-09	4,907E-09	4,907E-09	4,907E-09	4,907E-09	4,907E-09	4,907E-09	4,907E-09
2,035E-05	2,603E-09	1,227E-09	1,227E-09	1,227E-09	1,227E-09	1,227E-09	1,227E-09	1,227E-09	1,227E-09	1,227E-09
1,017E-05	6,508E-10	3,067E-10	3,067E-10	3,067E-10	3,067E-10	3,067E-10	3,067E-10	3,067E-10	3,067E-10	3,067E-10
5,086E-06	1,627E-10	7,668E-11	7,668E-11	7,668E-11	7,668E-11	7,668E-11	7,668E-11	7,668E-11	7,668E-11	7,668E-11
2,543E-06	4,067E-11	1,917E-11	1,917E-11	1,917E-11	1,917E-11	1,917E-11	1,917E-11	1,917E-11	1,917E-11	1,917E-11
1,272E-06	1,017E-11	4,792E-12	4,792E-12	4,792E-12	4,792E-12	4,792E-12	4,792E-12	4,792E-12	4,792E-12	4,804E-12
6,358E-07	2,542E-12	1,198E-12	1,198E-12	1,198E-12	1,198E-12	1,198E-12	1,198E-12	1,198E-12	1,198E-12	2,513E-11
3,179E-07	6,355E-13	2,995E-13	2,995E-13	2,995E-13	2,995E-13	2,995E-13	2,995E-13	2,995E-13	3,494E-13	2,158E-09
1,589E-07	1,589E-13	7,488E-14	7,488E-14	7,488E-14	7,488E-14	7,488E-14	7,488E-14	7,485E-14	1,222E-10	2,289E-05
7,947E-08	3,972E-14	1,872E-14	1,872E-14	1,872E-14	1,872E-14	1,872E-14	1,872E-14	1,914E-14	9,550E-09	9,733E-03
3,974E-08	9,930E-15	4,680E-15	4,680E-15	4,680E-15	4,680E-15	4,680E-15	4,680E-15	2,342E-13	2,382E-06	5,447E+00
1,987E-08	2,483E-15	1,170E-15	1,170E-15	1,170E-15	1,170E-15	1,170E-15	1,164E-15	1,199E-11	3,620E-04	1,133E+03

Tabela 12 – módulo de  $Em$ , variável  $T_{2/3}$ , malha A.

$h$	$Em, p = 1$	$Em, p = 2$	$Em, p = 3$	$Em, p = 4$	$Em, p = 5$	$Em, p = 6$	$Em, p = 7$	$Em, p = 8$	$Em, p = 9$	$Em, p = 10$
3,333E-01	6,799E-01	4,559E-01								
1,667E-01	1,018E-02	9,362E-02								
8,333E-02	5,986E-03	2,473E-02	1,982E-02	2,004E-02	1,942E-02	1,977E-02	1,908E-02			
4,167E-02	8,662E-04	3,519E-03	3,230E-04	1,763E-04	3,772E-04	2,605E-04	4,997E-04	5,141E-03	5,159E-03	5,152E-03
2,083E-02	1,134E-04	4,554E-04	4,393E-05	1,093E-05	2,305E-05	1,516E-05	3,339E-05	7,952E-07	5,108E-06	2,694E-06
1,042E-02	1,434E-05	5,742E-05	3,424E-06	3,020E-07	3,745E-07	2,401E-07	6,742E-07	8,436E-08	4,779E-07	3,170E-07
5,208E-03	1,798E-06	7,193E-06	2,196E-07	7,085E-09	1,746E-09	9,262E-10	4,903E-09	1,336E-09	7,583E-09	5,029E-09
2,604E-03	2,249E-07	8,996E-07	1,374E-08	2,144E-10	7,181E-12	7,282E-13	1,362E-11	5,240E-12	2,974E-11	1,972E-11
1,302E-03	2,812E-08	1,125E-07	8,532E-10	6,740E-12	9,433E-14	1,378E-15	1,192E-14	5,123E-15	2,907E-14	1,928E-14
6,510E-04	3,515E-09	1,406E-08	5,317E-11	2,110E-13	1,486E-15	1,261E-17	2,664E-18	1,254E-18	7,098E-18	4,707E-18
3,255E-04	4,394E-10	1,757E-09	3,315E-12	6,598E-15	2,336E-17	9,884E-20	5,133E-22	8,233E-23	4,334E-22	2,873E-22
1,628E-04	5,492E-11	2,197E-10	2,070E-13	2,062E-16	3,658E-19	7,725E-22	2,691E-24	1,293E-26	6,687E-27	4,378E-27
8,138E-05	6,865E-12	2,746E-11	1,293E-14	6,445E-18	5,723E-21	6,036E-24	1,054E-26	2,945E-29	6,520E-30	6,456E-30
4,069E-05	8,581E-13	3,432E-12	8,080E-16	2,014E-19	8,947E-23	4,705E-26	7,224E-29	1,135E-28	1,135E-28	1,142E-28
2,035E-05	1,073E-13	4,291E-13	5,049E-17	6,294E-21	1,399E-24	7,508E-29	2,932E-28	2,933E-28	2,926E-28	1,257E-28
1,017E-05	1,341E-14	5,363E-14	3,155E-18	1,967E-22	2,289E-26	1,037E-27	1,040E-27	1,040E-27	1,033E-27	1,006E-23
5,086E-06	1,676E-15	6,704E-15	1,972E-19	6,151E-24	5,092E-27	4,751E-27	4,751E-27	4,773E-27	1,355E-24	1,867E-20
2,543E-06	2,095E-16	8,380E-16	1,233E-20	1,861E-25	5,936E-27	5,941E-27	5,941E-27	5,922E-27	2,109E-22	2,873E-18
1,272E-06	2,619E-17	1,048E-16	7,703E-22	2,389E-26	2,989E-26	2,989E-26	2,990E-26	8,822E-25	8,888E-19	1,710E-14
6,358E-07	3,273E-18	1,309E-17	4,825E-23	1,064E-25	1,062E-25	1,062E-25	1,055E-25	1,197E-21	1,771E-16	3,475E-11
3,179E-07	4,092E-19	1,637E-18	2,517E-24	4,924E-25	4,924E-25	4,924E-25	4,070E-25	1,645E-20	7,238E-14	3,146E-09
1,589E-07	5,115E-20	2,046E-19	3,001E-25	4,882E-25	4,882E-25	4,882E-25	7,830E-23	4,319E-17	1,773E-10	3,324E-05
7,947E-08	6,373E-21	2,555E-20	2,006E-23	2,005E-23	2,005E-23	2,005E-23	1,475E-21	6,201E-16	1,393E-08	1,415E-02
3,974E-08	8,294E-22	3,227E-21	3,025E-23	3,025E-23	3,025E-23	3,026E-23	9,625E-20	3,331E-13	3,464E-06	7,906E+00
1,987E-08	3,352E-23	3,332E-22	6,638E-23	6,638E-23	6,638E-23	6,638E-23	9,371E-18	1,753E-11	5,247E-04	1,644E+03





Tabela 14 – Odem efetiva (acurácia) com MER ( $pEm$ ), variável  $T_{2/3}$ , malha A.

$h$	$pEm, p=1$	$pEm, p=2$	$pEm, p=3$	$pEm, p=4$	$pEm, p=5$	$pEm, p=6$	$pEm, p=7$	$pEm, p=8$	$pEm, p=9$	$pEm, p=10$
3,33E-01										
1,67E-01	6,06E+00	2,28E+00								
8,33E-02	7,67E-01	1,92E+00								
4,17E-02	2,79E+00	2,81E+00	5,94E+00	6,83E+00	5,69E+00	6,25E+00	5,25E+00			
2,08E-02	2,93E+00	2,95E+00	2,88E+00	4,01E+00	4,03E+00	4,10E+00	3,90E+00	1,27E+01	9,98E+00	1,09E+01
1,04E-02	2,98E+00	2,99E+00	3,68E+00	5,18E+00	5,94E+00	5,98E+00	5,63E+00	3,24E+00	3,42E+00	3,09E+00
5,21E-03	3,00E+00	3,00E+00	3,96E+00	5,41E+00	7,74E+00	8,02E+00	7,10E+00	5,98E+00	5,98E+00	5,98E+00
2,60E-03	3,00E+00	3,00E+00	4,00E+00	5,05E+00	7,93E+00	1,03E+01	8,49E+00	7,99E+00	7,99E+00	7,99E+00
1,30E-03	3,00E+00	3,00E+00	4,01E+00	4,99E+00	6,25E+00	9,05E+00	1,02E+01	1,00E+01	1,00E+01	1,00E+01
6,51E-04	3,00E+00	3,00E+00	4,00E+00	5,00E+00	5,99E+00	6,77E+00	1,21E+01	1,20E+01	1,20E+01	1,20E+01
3,26E-04	3,00E+00	3,00E+00	4,00E+00	5,00E+00	5,99E+00	7,00E+00	1,23E+01	1,39E+01	1,40E+01	1,40E+01
1,63E-04	3,00E+00	3,00E+00	4,00E+00	5,00E+00	6,00E+00	7,00E+00	7,58E+00	1,26E+01	1,60E+01	1,60E+01
8,14E-05	3,00E+00	3,00E+00	4,00E+00	5,00E+00	6,00E+00	7,00E+00	8,00E+00	8,78E+00	1,00E+01	9,41E+00
4,07E-05	3,00E+00	3,00E+00	4,00E+00	5,00E+00	6,00E+00	7,00E+00	7,19E+00	-1,95E+00	-4,12E+00	-4,14E+00
2,03E-05	3,00E+00	3,00E+00	4,00E+00	5,00E+00	6,00E+00	9,29E+00	-2,02E+00	-1,37E+00	-1,37E+00	-1,38E-01
1,02E-05	3,00E+00	3,00E+00	4,00E+00	5,00E+00	5,93E+00	-3,79E+00	-1,83E+00	-1,83E+00	-1,82E+00	-1,63E+01
5,09E-06	3,00E+00	3,00E+00	4,00E+00	5,00E+00	2,17E+00	-2,20E+00	-2,19E+00	-2,20E+00	-1,04E+01	-1,09E+01
2,54E-06	3,00E+00	3,00E+00	4,00E+00	5,05E+00	-2,21E-01	-3,22E-01	-3,22E-01	-3,11E-01	-7,28E+00	-7,27E+00
1,27E-06	3,00E+00	3,00E+00	4,00E+00	2,96E+00	-2,33E+00	-2,33E+00	-2,33E+00	-7,22E+00	-1,20E+01	-1,25E+01
6,36E-07	3,00E+00	3,00E+00	4,00E+00	-2,15E+00	-1,83E+00	-1,83E+00	-1,82E+00	-1,04E+01	-7,64E+00	-1,10E+01
3,18E-07	3,00E+00	3,00E+00	4,26E+00	-2,21E+00	-2,21E+00	-2,21E+00	-1,95E+00	-3,78E+00	-8,68E+00	-6,50E+00
1,59E-07	3,00E+00	3,00E+00	3,07E+00	1,24E-02	1,24E-02	1,24E-02	-7,59E+00	-1,14E+01	-1,13E+01	-1,34E+01
7,95E-08	3,00E+00	3,00E+00	-6,06E+00	-5,36E+00	-5,36E+00	-5,36E+00	-4,24E+00	-3,84E+00	-6,30E+00	-8,73E+00
3,97E-08	2,94E+00	2,99E+00	-5,93E-01	-5,94E-01	-5,94E-01	-5,94E-01	-6,03E+00	-9,07E+00	-7,96E+00	-9,13E+00
1,99E-08	4,63E+00	3,28E+00	-1,13E+00	-1,13E+00	-1,13E+00	-1,13E+00	-6,61E+00	-5,72E+00	-7,24E+00	-7,70E+00

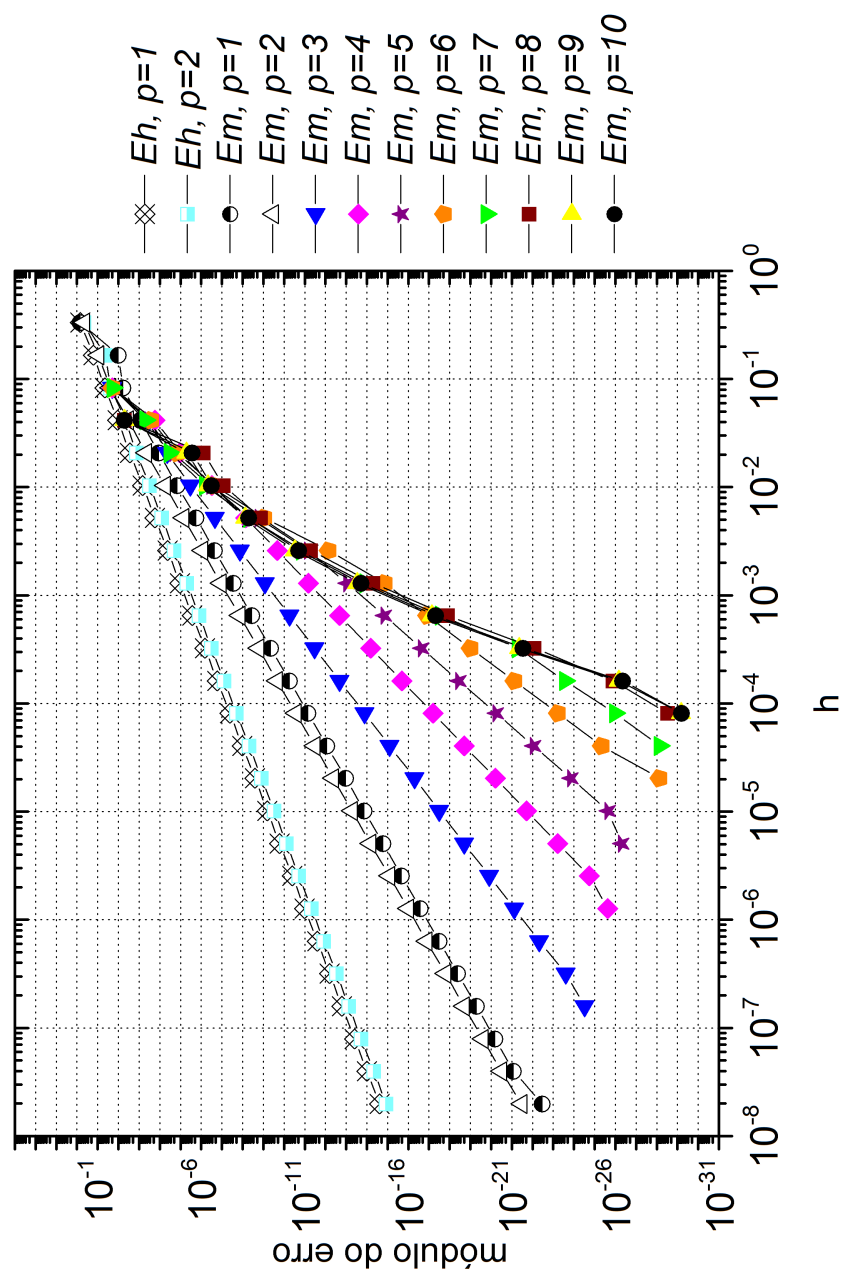


Figura 38 –  $Em$  e  $Eh$  com o máximo de extrapolações possíveis, até chegar no erro de máquina, variável  $T_{2/3}$ , malha A.

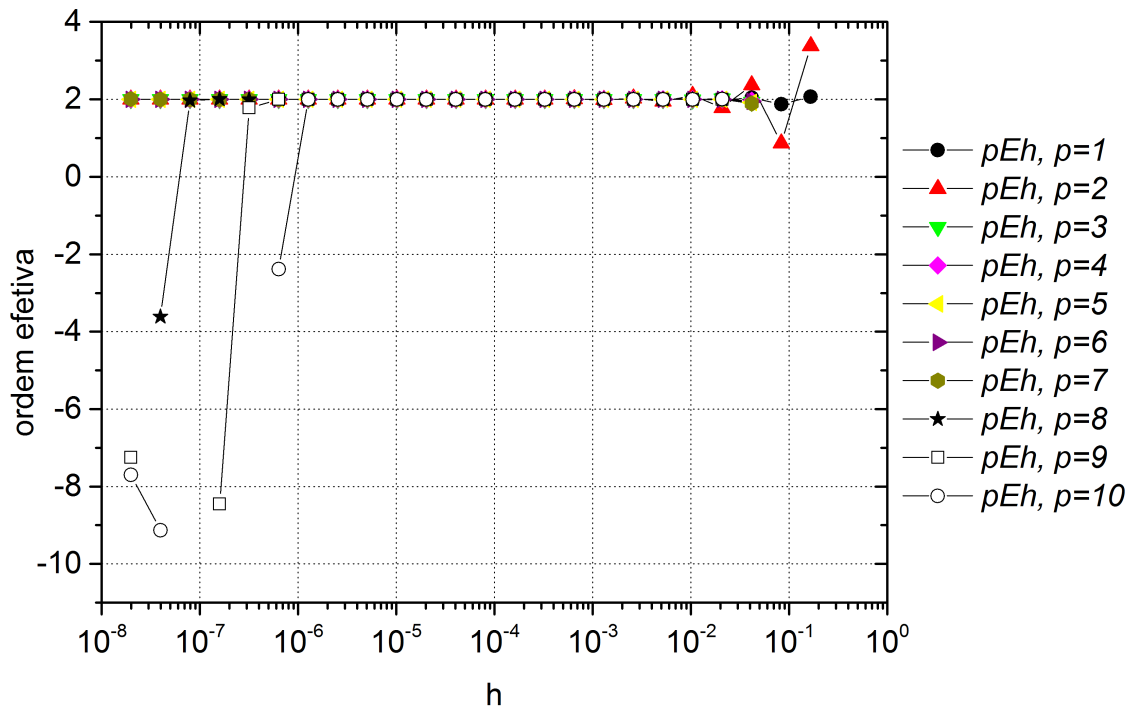
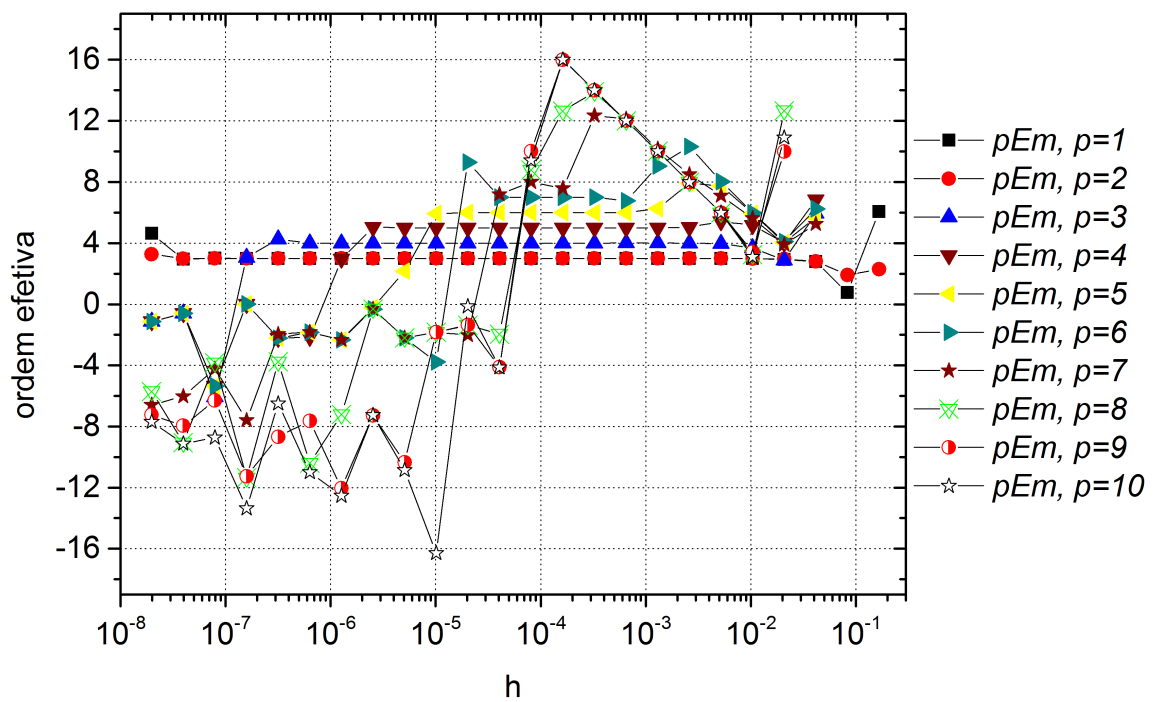
(a)  $pEh$ .(b)  $pEm$ .

Figura 39 –  $pEh$  e  $pEm$  com o máximo de extrapolações possíveis, malha A, variável  $T_{2/3}$ .

A.2.5.1 Dados utilizados para os gráficos da Seção 4.1.4, variável  $T_{2/3}$

Tabela 15 –  $Eh$  obtido com quantidade reduzida de malhas e com malha inicial mais fina, obtida do refino da malha A, variável  $T_{2/3}$ .

$h$	$Eh, p = 1$	$Eh, p = 2$	$Eh, p = 3$	$Eh, p = 4$	$Eh, p = 5$	$Eh, p = 6$	$Eh, p = 7$	$Eh, p = 8$	$Eh, p = 9$	$Eh, p = 10$
4,17E-02	1,08E-02	4,63E-03	5,20E-03	5,14E-03	5,14E-03	5,14E-03	5,14E-03	5,14E-03	5,16E-03	5,15E-03
2,08E-02	2,74E-03	1,34E-03	1,28E-03	1,29E-03	1,29E-03	1,29E-03	1,29E-03	1,29E-03	1,29E-03	1,29E-03
1,04E-02	6,80E-04	3,14E-04	3,22E-04	3,22E-04	3,22E-04	3,22E-04	3,22E-04	3,22E-04	3,22E-04	3,22E-04
5,21E-03	1,71E-04	8,13E-05	8,04E-05	8,04E-05	8,04E-05	8,04E-05	8,04E-05	8,04E-05	8,04E-05	8,04E-05
2,60E-03	4,26E-05	2,00E-05	2,01E-05	2,01E-05	2,01E-05	2,01E-05	2,01E-05	2,01E-05	2,01E-05	2,01E-05
1,30E-03	1,07E-05	5,04E-06	5,03E-06	5,03E-06	5,03E-06	5,03E-06	5,03E-06	5,03E-06	5,03E-06	5,03E-06
6,51E-04	2,67E-06	1,25E-06	1,26E-06	1,26E-06	1,26E-06	1,26E-06	1,26E-06	1,26E-06	1,26E-06	1,26E-06
3,26E-04	6,66E-07	3,14E-07	3,14E-07	3,14E-07	3,14E-07	3,14E-07	3,14E-07	3,14E-07	3,14E-07	3,14E-07
1,63E-04	1,67E-07	7,85E-08	7,85E-08	7,85E-08	7,85E-08	7,85E-08	7,85E-08	7,85E-08	7,85E-08	7,85E-08
8,14E-05	4,17E-08	1,96E-08	1,96E-08	1,96E-08	1,96E-08	1,96E-08	1,96E-08	1,96E-08	1,96E-08	1,96E-08
4,07E-05	1,04E-08	4,91E-09	4,91E-09	4,91E-09	4,91E-09	4,91E-09	4,91E-09	4,91E-09	4,91E-09	4,91E-09
2,03E-05	2,60E-09	1,23E-09	1,23E-09	1,23E-09	1,23E-09	1,23E-09	1,23E-09	1,23E-09	1,23E-09	1,23E-09
1,02E-05	6,51E-10	3,07E-10	3,07E-10	3,07E-10	3,07E-10	3,07E-10	3,07E-10	3,07E-10	3,07E-10	3,07E-10
5,09E-06	1,63E-10	7,67E-11	7,67E-11	7,67E-11	7,67E-11	7,67E-11	7,67E-11	7,67E-11	7,67E-11	7,67E-11
2,54E-06	4,07E-11	1,92E-11	1,92E-11	1,92E-11	1,92E-11	1,92E-11	1,92E-11	1,92E-11	1,92E-11	1,92E-11
1,27E-06	1,02E-11	4,79E-12	4,79E-12	4,79E-12	4,79E-12	4,79E-12	4,79E-12	4,79E-12	4,79E-12	4,80E-12
6,36E-07	2,54E-12	1,20E-12	1,20E-12	1,20E-12	1,20E-12	1,20E-12	1,20E-12	1,20E-12	1,20E-12	2,51E-11
3,18E-07	6,36E-13	3,00E-13	3,00E-13	3,00E-13	3,00E-13	3,00E-13	3,00E-13	3,00E-13	3,49E-13	-2,16E-09
1,59E-07	1,59E-13	7,49E-14	7,49E-14	7,49E-14	7,49E-14	7,49E-14	7,49E-14	7,49E-14	1,22E-10	2,29E-05
7,95E-08	3,97E-14	1,87E-14	1,87E-14	1,87E-14	1,87E-14	1,87E-14	1,87E-14	1,91E-14	-9,55E-09	-9,73E-03
3,97E-08	9,93E-15	4,68E-15	4,68E-15	4,68E-15	4,68E-15	4,68E-15	4,68E-15	2,34E-13	2,38E-06	-5,45E+00
1,99E-08	2,48E-15	1,17E-15	1,17E-15	1,17E-15	1,17E-15	1,17E-15	1,16E-15	-1,20E-11	3,62E-04	-1,13E+03

Tabela 16 –  $Em$  obtido com quantidade reduzida de malhas e com malha inicial mais fina, obtida do refino da malha A, variável  $T_{2/3}$ .

$h$	$Em, p = 1$	$Em, p = 2$	$Em, p = 3$	$Em, p = 4$	$Em, p = 5$	$Em, p = 6$	$Em, p = 7$	$Em, p = 8$	$Em, p = 9$	$Em, p = 10$
4,17E-02	1,08E-02	4,63E-03	5,20E-03	5,14E-03	5,14E-03	5,14E-03	5,14E-03	5,14E-03	5,16E-03	5,15E-03
2,08E-02	6,49E-05	2,48E-04	-2,10E-05	7,68E-07	1,96E-06	2,07E-06	-6,86E-08	7,95E-07	-5,11E-06	-2,69E-06
1,04E-02	-1,20E-05	-4,81E-05	2,68E-06	1,26E-07	8,44E-09	-4,86E-10	1,42E-07	8,44E-08	4,78E-07	3,17E-07
5,21E-03	1,72E-06	6,87E-06	-2,05E-07	-5,88E-09	-2,76E-10	1,54E-11	-2,25E-09	-1,34E-09	-7,58E-09	-5,03E-09
2,60E-03	-2,22E-07	-8,89E-07	1,35E-08	2,07E-10	5,47E-12	-1,77E-13	8,82E-12	5,24E-12	2,97E-11	1,97E-11
1,30E-03	2,80E-08	1,12E-07	-8,50E-10	-6,69E-12	-9,26E-14	1,56E-15	-8,59E-15	-5,12E-15	-2,91E-14	-1,93E-14
6,51E-04	-3,51E-09	-1,40E-08	5,31E-11	2,11E-13	1,48E-15	-1,25E-17	1,94E-18	1,25E-18	7,10E-18	4,71E-18
3,26E-04	4,39E-10	1,76E-09	-3,31E-12	-6,59E-15	-2,33E-17	9,86E-20	5,54E-22	-8,23E-23	-4,33E-22	-2,87E-22
1,63E-04	-5,49E-11	-2,20E-10	2,07E-13	2,06E-16	3,66E-19	-7,72E-22	-2,69E-24	1,29E-26	6,69E-27	4,38E-27
8,14E-05	6,86E-12	2,75E-11	-1,29E-14	-6,44E-18	-5,72E-21	6,04E-24	1,05E-26	-2,95E-29	-6,52E-30	-6,46E-30
4,07E-05	-8,58E-13	-3,43E-12	8,08E-16	2,01E-19	8,95E-23	-4,70E-26	7,22E-29	1,14E-28	1,13E-28	1,14E-28
2,03E-05	1,07E-13	4,29E-13	-5,05E-17	-6,29E-21	-1,40E-24	7,51E-29	-2,93E-28	-2,93E-28	-2,93E-28	1,26E-28
1,02E-05	-1,34E-14	-5,36E-14	3,16E-18	1,97E-22	2,29E-26	1,04E-27	1,04E-27	1,04E-27	1,03E-27	-1,01E-23
5,09E-06	1,68E-15	6,70E-15	-1,97E-19	-6,15E-24	-5,09E-27	-4,75E-27	-4,75E-27	-4,77E-27	-1,35E-24	1,87E-20
2,54E-06	-2,10E-16	-8,38E-16	1,23E-20	1,86E-25	-5,94E-27	-5,94E-27	-5,94E-27	-5,92E-27	2,11E-22	-2,87E-18
1,27E-06	2,62E-17	1,05E-16	-7,70E-22	2,39E-26	2,99E-26	2,99E-26	2,99E-26	-8,82E-25	8,89E-19	1,71E-14
6,36E-07	-3,27E-18	-1,31E-17	4,83E-23	1,06E-25	1,06E-25	1,06E-25	1,05E-25	-1,20E-21	1,77E-16	3,47E-11
3,18E-07	4,09E-19	1,64E-18	-2,52E-24	4,92E-25	4,92E-25	4,92E-25	4,07E-25	-1,65E-20	7,24E-14	-3,15E-09
1,59E-07	-5,11E-20	-2,05E-19	-3,00E-25	-4,88E-25	-4,88E-25	-4,88E-25	-7,83E-23	-4,32E-17	1,77E-10	3,32E-05
7,95E-08	6,37E-21	2,56E-20	-2,01E-23	-2,00E-23	-2,00E-23	-2,00E-23	1,48E-21	6,20E-16	-1,39E-08	-1,41E-02
3,97E-08	-8,29E-22	-3,23E-21	-3,03E-23	-3,03E-23	-3,03E-23	-3,03E-23	9,62E-20	3,33E-13	3,46E-06	-7,91E+00
1,99E-08	3,35E-23	3,33E-22	-6,64E-23	-6,64E-23	-6,64E-23	-6,64E-23	-9,37E-18	-1,75E-11	5,25E-04	-1,64E+03

Tabela 17 – pEh obtido com quantidade reduzida de malhas e com malha inicial mais fina, obtida do refino da malha A, variável  $T_{2/3}$ .

$h$	$pEh, p=1$	$pEh, p=2$	$pEh, p=3$	$pEh, p=4$	$pEh, p=5$	$pEh, p=6$	$pEh, p=7$	$pEh, p=8$	$pEh, p=9$	$pEh, p=10$
4,17E-02										
2,08E-02	1,97E+00	1,79E+00	2,02E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
1,04E-02	2,01E+00	2,10E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
5,21E-03	1,99E+00	1,95E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
2,60E-03	2,00E+00	2,03E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
1,30E-03	2,00E+00	1,99E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
6,51E-04	2,00E+00	2,01E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
3,26E-04	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
1,63E-04	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
8,14E-05	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
4,07E-05	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
2,03E-05	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
1,02E-05	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
5,09E-06	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
2,54E-06	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
1,27E-06	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
6,36E-07	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	-2,39E+00
3,18E-07	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	1,78E+00	1,00E+11
1,59E-07	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	-8,45E+00	1,00E+11
7,95E-08	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	1,97E+00	1,00E+11	1,00E+11
3,97E-08	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	-3,61E+00	1,00E+11	-9,13E+00
1,99E-08	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,01E+00	1,00E+11	-7,25E+00	-7,70E+00

Tabela 18 –  $pEm$  obtido com quantidade reduzida de malhas e com malha inicial mais fina, obtida do refino da malha  $A$ , variável  $T_{2/3}$ .

$h$	$pEm, p=1$	$pEm, p=2$	$pEm, p=3$	$pEm, p=4$	$pEm, p=5$	$pEm, p=6$	$pEm, p=7$	$pEm, p=8$	$pEm, p=9$	$pEm, p=10$
4,17E-02										
2,08E-02	7,38E+00	4,22E+00	7,95E+00	1,27E+01	1,14E+01	1,13E+01	1,62E+01	1,27E+01	9,98E+00	1,09E+01
1,04E-02	2,43E+00	2,37E+00	2,97E+00	2,60E+00	7,86E+00	1,21E+01	-1,05E+00	3,24E+00	3,42E+00	3,09E+00
5,21E-03	2,81E+00	2,81E+00	3,71E+00	4,43E+00	4,93E+00	4,98E+00	5,98E+00	5,98E+00	5,98E+00	5,98E+00
2,60E-03	2,95E+00	2,95E+00	3,93E+00	4,83E+00	5,66E+00	6,44E+00	8,00E+00	7,99E+00	7,99E+00	7,99E+00
1,30E-03	2,99E+00	2,99E+00	3,99E+00	4,95E+00	5,88E+00	6,83E+00	1,00E+01	1,00E+01	1,00E+01	1,00E+01
6,51E-04	3,00E+00	3,00E+00	4,00E+00	4,99E+00	5,97E+00	6,96E+00	1,21E+01	1,20E+01	1,20E+01	1,20E+01
3,26E-04	3,00E+00	3,00E+00	4,00E+00	5,00E+00	5,99E+00	6,99E+00	1,18E+01	1,39E+01	1,40E+01	1,40E+01
1,63E-04	3,00E+00	3,00E+00	4,00E+00	5,00E+00	6,00E+00	7,00E+00	7,69E+00	1,26E+01	1,60E+01	1,60E+01
8,14E-05	3,00E+00	3,00E+00	4,00E+00	5,00E+00	6,00E+00	7,00E+00	8,00E+00	8,78E+00	1,00E+01	9,41E+00
4,07E-05	3,00E+00	3,00E+00	4,00E+00	5,00E+00	6,00E+00	7,00E+00	7,19E+00	-1,95E+00	-4,12E+00	-4,14E+00
2,03E-05	3,00E+00	3,00E+00	4,00E+00	5,00E+00	6,00E+00	9,29E+00	-2,02E+00	-1,37E+00	-1,37E+00	-1,38E-01
1,02E-05	3,00E+00	3,00E+00	4,00E+00	5,00E+00	5,93E+00	-3,79E+00	-1,83E+00	-1,83E+00	-1,82E+00	-1,63E+01
5,09E-06	3,00E+00	3,00E+00	4,00E+00	5,00E+00	2,17E+00	-2,20E+00	-2,19E+00	-2,20E+00	-1,04E+01	-1,09E+01
2,54E-06	3,00E+00	3,00E+00	4,00E+00	5,05E+00	-2,21E-01	-3,22E-01	-3,22E-01	-3,11E-01	-7,28E+00	-7,27E+00
1,27E-06	3,00E+00	3,00E+00	4,00E+00	2,96E+00	-2,33E+00	-2,33E+00	-2,33E+00	-7,22E+00	-1,20E+01	-1,25E+01
6,36E-07	3,00E+00	3,00E+00	4,00E+00	-2,15E+00	-1,83E+00	-1,83E+00	-1,82E+00	-1,04E+01	-7,64E+00	-1,10E+01
3,18E-07	3,00E+00	3,00E+00	4,26E+00	-2,21E+00	-2,21E+00	-2,21E+00	-1,95E+00	-3,78E+00	-8,68E+00	-6,50E+00
1,59E-07	3,00E+00	3,00E+00	3,07E+00	1,24E-02	1,24E-02	1,24E-02	-7,59E+00	-1,14E+01	-1,13E+01	-1,34E+01
7,95E-08	3,00E+00	3,00E+00	-6,06E+00	-5,36E+00	-5,36E+00	-5,36E+00	-4,24E+00	-3,84E+00	-6,30E+00	-8,73E+00
3,97E-08	2,94E+00	2,99E+00	-5,93E-01	-5,94E-01	-5,94E-01	-5,94E-01	-6,03E+00	-9,07E+00	-7,96E+00	-9,13E+00
1,99E-08	4,63E+00	3,28E+00	-1,13E+00	-1,13E+00	-1,13E+00	-1,13E+00	-6,61E+00	-5,72E+00	-7,24E+00	-7,70E+00



### A.2.6 Variável $x_{max}$



Tabela 20 – Módulo de Em, variável  $x_{max}$ , malha A.

$h$	$Em, p = 2$	$Em, p = 3$	$Em, p = 4$	$Em, p = 5$	$Em, p = 6$	$Em, p = 7$	$Em, p = 8$	$Em, p = 9$	$Em, p = 10$
3,33E-01	1,06E-01								
1,67E-01	1,22E-04	1,48E-04	1,51E-02	1,84E-02					
8,33E-02	2,06E-03	4,56E-04	2,80E-03	2,27E-03	2,24E-03	3,14E-03	2,70E-03	3,28E-03	
4,17E-02	7,19E-04	3,62E-04	1,06E-03	1,68E-03	1,50E-03	1,84E-03	1,71E-03	1,88E-03	6,13E-04
2,08E-02	3,95E-04	6,23E-05	9,79E-05	1,67E-05	6,04E-05	7,37E-05	3,95E-06	1,61E-04	1,87E-04
1,04E-02	7,30E-05	1,64E-06	2,02E-05	7,97E-05	4,70E-05	1,16E-04	8,04E-05	1,60E-04	1,18E-04
5,21E-03	4,26E-06	4,17E-07	1,81E-06	8,14E-06	4,62E-06	1,33E-05	8,60E-06	2,01E-05	1,35E-05
2,60E-03	2,12E-07	1,09E-07	3,03E-08	2,68E-07	1,31E-07	5,22E-07	3,01E-07	8,74E-07	5,49E-07
1,30E-03	9,62E-08	9,46E-09	1,23E-10	3,20E-09	1,39E-09	6,89E-09	3,74E-09	1,21E-08	7,37E-09
6,51E-04	5,20E-08	1,80E-09	4,56E-13	1,15E-11	4,79E-12	2,57E-11	1,36E-11	4,58E-11	2,76E-11
3,26E-04	2,54E-08	1,67E-10	3,98E-14	1,07E-14	4,52E-15	2,48E-14	1,31E-14	4,43E-14	2,67E-14
1,63E-04	1,37E-08	3,33E-11	4,89E-15	8,72E-18	1,09E-18	6,03E-18	3,18E-18	1,08E-17	6,49E-18
8,14E-05	5,88E-09	3,74E-12	6,06E-16	1,61E-20	9,97E-23	3,68E-22	1,94E-22	6,59E-22	3,96E-22
4,07E-05	1,06E-09	4,50E-13	5,42E-17	1,61E-21	4,98E-24	4,84E-27	2,95E-27	1,00E-26	6,04E-27
2,03E-05	1,75E-11	2,03E-14	2,13E-18	4,43E-22	1,07E-25	3,78E-29	2,71E-29	2,69E-29	3,70E-27
1,02E-05	2,28E-11	4,55E-15	1,66E-21	8,28E-24	1,41E-27	3,95E-28	3,95E-28	5,26E-28	6,17E-25
5,09E-06	1,28E-11	1,00E-15	4,30E-21	3,50E-25	1,29E-27	1,29E-27	1,29E-27	1,82E-25	7,07E-22
2,54E-06	5,51E-12	1,12E-16	5,51E-22	4,90E-27	3,97E-27	3,97E-27	2,83E-27	7,14E-23	1,41E-18
1,27E-06	1,08E-12	1,38E-17	5,02E-23	1,25E-26	1,26E-26	1,26E-26	2,16E-25	4,05E-20	5,74E-16
6,36E-07	8,38E-14	4,90E-19	2,26E-24	2,05E-26	2,05E-26	2,07E-26	1,26E-23	5,68E-18	5,49E-13
3,18E-07	1,33E-14	1,00E-19	2,32E-27	4,45E-26	4,45E-26	6,11E-26	1,11E-22	1,34E-15	6,92E-11
1,59E-07	5,96E-15	2,08E-20	1,16E-25	1,18E-25	1,18E-25	1,30E-25	7,48E-19	1,95E-12	4,47E-07
7,95E-08	3,20E-15	1,10E-21	6,20E-24	6,20E-24	6,20E-24	5,67E-23	4,73E-16	4,66E-09	2,42E-04
3,97E-08	1,38E-15	1,63E-22	6,57E-24	6,57E-24	6,57E-24	1,78E-20	5,06E-16	2,80E-07	8,08E-05
1,99E-08	2,57E-16	2,15E-23	3,06E-24	3,06E-24	2,87E-24	6,80E-21	1,24E-12	6,60E-07	5,40E-06

Tabela 21 – Ordem efetiva (acurácia) sem MER ( $pEh$ ), variável  $x_{max}$ , malha A.

$h$	$pEh, p = 2$	$pEh, p = 3$	$pEh, p = 4$	$pEh, p = 5$	$pEh, p = 6$	$pEh, p = 7$	$pEh, p = 8$	$pEh, p = 9$	$pEh, p = 10$
3,33E-01									
1,67E-01	2,00E+00								
8,33E-02	2,35E+00	-1,36E+00	3,17E+00	2,67E+00					
4,17E-02	2,91E+00	3,08E-02							
2,08E-02	8,02E-01	2,39E+00	2,01E+00	1,30E+00	1,74E+00	1,05E+00	1,41E+00	7,57E-01	1,06E+00
1,04E-02	2,54E+00	2,30E+00	3,10E+00	4,89E+00	3,95E+00	8,83E+00	5,12E+00		
5,21E-03	2,00E+00	1,98E+00	2,00E+00	1,22E+00	1,73E+00	2,40E+00	9,95E-01		
2,60E-03	2,03E+00	2,11E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
1,30E-03	1,92E+00	1,99E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
6,51E-04	2,17E+00	2,03E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
3,26E-04	1,69E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
1,63E-04	2,81E+00	2,01E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
8,14E-05	8,41E-01	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
4,07E-05	2,49E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
2,03E-05	2,16E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
1,02E-05	1,70E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
5,09E-06	2,76E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
2,54E-06	8,93E-01	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
1,27E-06	2,56E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
6,36E-07	1,92E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
3,18E-07	2,17E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,11E+00	
1,59E-07	1,69E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	6,88E+00	
7,95E-08	2,79E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,79E+00	1,12E+01	
3,97E-08	8,65E-01	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	4,43E-02	5,92E+00	
1,99E-08	2,52E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00		1,42E+00	2,60E+00

Tabela 22 – Ordem efetiva (acurácia) com MER ( $pEm$ ), variável  $x_{max}$ , malha A.

$h$	$pEm, p = 2$	$pEm, p = 3$	$pEm, p = 4$	$pEm, p = 5$	$pEm, p = 6$	$pEm, p = 7$	$pEm, p = 8$	$pEm, p = 9$	$pEm, p = 10$
3,33E-01									
1,67E-01	9,76E+00								
8,33E-02	-4,08E+00	-1,63E+00	2,43E+00	3,02E+00	5,77E-01	7,73E-01	6,58E-01	8,03E-01	
4,17E-02	1,52E+00	3,32E-01	1,40E+00	4,35E-01	4,64E+00	4,64E+00	8,76E+00	3,54E+00	1,71E+00
2,08E-02	8,65E-01	2,54E+00	3,44E+00	6,65E+00	3,60E-01	-6,55E-01	-4,35E+00	7,88E-03	6,71E-01
1,04E-02	2,43E+00	5,25E+00	2,27E+00	2,25E+00	3,35E+00	3,13E+00	3,22E+00	3,00E+00	3,12E+00
5,21E-03	4,10E+00	1,98E+00	3,48E+00	3,29E+00	5,14E+00	4,67E+00	4,83E+00	4,52E+00	4,62E+00
2,60E-03	4,33E+00	1,94E+00	5,90E+00	4,92E+00	6,56E+00	6,24E+00	6,33E+00	6,17E+00	6,22E+00
1,30E-03	1,14E+00	3,53E+00	7,94E+00	6,39E+00	8,18E+00	8,07E+00	8,10E+00	8,05E+00	8,06E+00
6,51E-04	8,89E-01	2,39E+00	8,08E+00	8,12E+00	1,01E+01	1,00E+01	1,00E+01	1,00E+01	1,00E+01
3,26E-04	1,03E+00	3,43E+00	3,52E+00	1,01E+01	1,20E+01	1,20E+01	1,20E+01	1,20E+01	1,20E+01
1,63E-04	8,87E-01	2,33E+00	3,03E+00	1,03E+01	1,34E+01	1,40E+01	1,40E+01	1,40E+01	1,40E+01
8,14E-05	1,22E+00	3,15E+00	3,01E+00	9,08E+00	4,32E+00	1,62E+01	1,60E+01	1,60E+01	1,60E+01
4,07E-05	2,48E+00	3,06E+00	3,48E+00	3,33E+00	5,54E+00	7,00E+00	6,77E+00	8,55E+00	7,06E-01
2,03E-05	5,91E+00	4,47E+00	4,67E+00	1,86E+00	6,24E+00	-3,38E+00	-3,86E+00	-4,29E+00	-7,38E+00
1,02E-05	-3,77E-01	2,16E+00	1,03E+01	5,74E+00	1,38E-01	-1,70E+00	-1,70E+00	-8,44E+00	-1,02E+01
5,09E-06	8,34E-01	2,18E+00	-1,37E+00	4,56E+00	-1,62E+00	-1,62E+00	-1,14E+00	-8,62E+00	-1,10E+01
2,54E-06	1,21E+00	3,16E+00	2,96E+00	6,16E+00	-1,66E+00	-1,66E+00	-6,26E+00	-9,15E+00	-8,67E+00
1,27E-06	2,35E+00	3,03E+00	3,45E+00	1,36E+00	-7,08E-01	-7,16E-01	-5,86E+00	-7,13E+00	-9,90E+00
6,36E-07	3,68E+00	4,81E+00	4,47E+00	7,11E-01	-1,12E+00	-1,56E+00	-3,14E+00	-7,88E+00	-6,98E+00
3,18E-07	2,66E+00	2,29E+00	9,93E+00	1,12E+00	-1,41E+00	-1,09E+00	-1,27E+01	-1,05E+01	-1,27E+01
1,59E-07	1,16E+00	2,27E+00	-5,64E+00	1,41E+00	-5,71E+00	-8,77E+00	-9,30E+00	-1,12E+01	-9,08E+00
7,95E-08	8,95E-01	4,25E+00	-5,74E+00	5,71E+00	-8,33E-02	-8,30E+00	-9,67E-02	-5,91E+00	1,58E+00
3,97E-08	1,22E+00	2,75E+00	-8,38E-02	8,39E-02	1,20E+00	1,39E+00	-1,13E+01	-1,24E+00	3,90E+00
1,99E-08	2,42E+00	2,93E+00	1,10E+00	1,10E+00					

### A.2.7 Variável $T_{max}$

Tabela 23 – Módulo de  $Eh$ , variável  $T_{max}$ , malha A.

$h$	$Eh, p = 2$	$Eh, p = 3$	$Eh, p = 4$	$Eh, p = 5$	$Eh, p = 6$	$Eh, p = 7$	$Eh, p = 8$	$Eh, p = 9$	$Eh, p = 10$
3,33E-01	3,18E-01								
1,67E-01	9,44E-02	9,05E-02	9,33E-02	9,36E-02					
8,33E-02	2,45E-02	2,31E-02	2,37E-02	2,40E-02	2,39E-02	2,41E-02	2,40E-02	2,41E-02	
4,17E-02	5,24E-03	5,69E-03	5,72E-03	5,79E-03	5,77E-03	5,83E-03	5,81E-03	5,86E-03	5,84E-03
2,08E-02	1,43E-03	1,41E-03	1,41E-03	1,40E-03	1,41E-03	1,40E-03	1,40E-03	1,40E-03	1,40E-03
1,04E-02	3,58E-04	3,53E-04	3,53E-04	3,53E-04	3,53E-04	3,54E-04	3,54E-04	3,55E-04	3,54E-04
5,21E-03	8,76E-05	8,83E-05	8,83E-05	8,83E-05	8,83E-05	8,83E-05	8,83E-05	8,83E-05	8,83E-05
2,60E-03	2,21E-05	2,21E-05	2,21E-05	2,21E-05	2,21E-05	2,21E-05	2,21E-05	2,21E-05	2,21E-05
1,30E-03	5,51E-06	5,52E-06	5,52E-06	5,52E-06	5,52E-06	5,52E-06	5,52E-06	5,52E-06	5,52E-06
6,51E-04	1,38E-06	1,38E-06	1,38E-06	1,38E-06	1,38E-06	1,38E-06	1,38E-06	1,38E-06	1,38E-06
3,26E-04	3,45E-07	3,45E-07	3,45E-07	3,45E-07	3,45E-07	3,45E-07	3,45E-07	3,45E-07	3,45E-07
1,63E-04	8,62E-08	8,62E-08	8,62E-08	8,62E-08	8,62E-08	8,62E-08	8,62E-08	8,62E-08	8,62E-08
8,14E-05	2,16E-08	2,16E-08	2,16E-08	2,16E-08	2,16E-08	2,16E-08	2,16E-08	2,16E-08	2,16E-08
4,07E-05	5,39E-09	5,39E-09	5,39E-09	5,39E-09	5,39E-09	5,39E-09	5,39E-09	5,39E-09	5,39E-09
2,03E-05	1,35E-09	1,35E-09	1,35E-09	1,35E-09	1,35E-09	1,35E-09	1,35E-09	1,35E-09	1,35E-09
1,02E-05	3,37E-10	3,37E-10	3,37E-10	3,37E-10	3,37E-10	3,37E-10	3,37E-10	3,37E-10	3,37E-10
5,09E-06	8,42E-11	8,42E-11	8,42E-11	8,42E-11	8,42E-11	8,42E-11	8,42E-11	8,42E-11	8,42E-11
2,54E-06	2,10E-11	2,10E-11	2,10E-11	2,10E-11	2,10E-11	2,10E-11	2,10E-11	2,10E-11	2,10E-11
1,27E-06	5,26E-12	5,26E-12	5,26E-12	5,26E-12	5,26E-12	5,26E-12	5,26E-12	5,26E-12	5,26E-12
6,36E-07	1,32E-12	1,32E-12	1,32E-12	1,32E-12	1,32E-12	1,32E-12	1,32E-12	1,32E-12	1,32E-12
3,18E-07	3,29E-13	3,29E-13	3,29E-13	3,29E-13	3,29E-13	3,29E-13	3,29E-13	3,32E-13	2,00E-10
1,59E-07	8,22E-14	8,22E-14	8,22E-14	8,22E-14	8,22E-14	8,22E-14	8,22E-14	9,73E-13	3,73E-07
7,95E-08	2,06E-14	2,06E-14	2,06E-14	2,06E-14	2,06E-14	2,06E-14	2,09E-14	2,09E-09	1,05E-03
3,97E-08	5,14E-15	5,14E-15	5,14E-15	5,14E-15	5,14E-15	5,14E-15	3,15E-16	6,08E-08	1,97E-01
1,99E-08	1,28E-15	1,28E-15	1,28E-15	1,28E-15	1,28E-15	1,28E-15	2,89E-12	1,71E-05	1,83E+02

Tabela 24 – Módulo de  $Em$ , variável  $T_{max}$ , malha A.

$h$	$Em, p = 2$	$Em, p = 3$	$Em, p = 4$	$Em, p = 5$	$Em, p = 6$	$Em, p = 7$	$Em, p = 8$	$Em, p = 9$	$Em, p = 10$
3,33E-01	3,18E-01								
1,67E-01	1,99E-02	9,05E-02	9,33E-02	9,36E-02					
8,33E-02	4,84E-05	6,26E-04	5,64E-04	7,92E-04	2,39E-02	2,41E-02	2,40E-02	2,41E-02	
4,17E-02	1,36E-03	1,58E-04	3,49E-04	3,52E-04	2,73E-04	2,50E-04	2,51E-04	2,19E-04	5,84E-03
2,08E-02	2,87E-04	6,71E-06	4,38E-06	4,05E-05	3,36E-05	6,49E-05	5,42E-05	8,23E-05	8,21E-05
1,04E-02	1,70E-05	1,58E-06	3,43E-06	9,03E-06	6,61E-06	1,21E-05	9,82E-06	1,55E-05	1,18E-05
5,21E-03	2,46E-06	6,02E-09	1,44E-07	5,54E-07	3,56E-07	9,06E-07	6,47E-07	1,36E-06	9,73E-07
2,60E-03	5,75E-07	7,44E-09	1,79E-09	1,73E-08	9,65E-09	3,53E-08	2,27E-08	5,93E-08	4,08E-08
1,30E-03	7,60E-08	5,70E-10	2,58E-12	2,13E-10	1,11E-10	4,81E-10	2,98E-10	8,43E-10	5,71E-10
6,51E-04	9,51E-09	3,56E-11	1,36E-13	7,81E-13	3,95E-13	1,81E-12	1,11E-12	3,21E-12	2,17E-12
3,26E-04	1,19E-09	2,21E-12	4,46E-15	7,35E-16	3,77E-16	1,75E-15	1,07E-15	3,12E-15	2,10E-15
1,63E-04	1,47E-10	1,34E-13	1,39E-16	6,77E-20	9,20E-20	4,27E-19	2,61E-19	7,61E-19	5,12E-19
8,14E-05	1,80E-11	8,19E-15	4,30E-18	3,89E-21	9,64E-24	2,61E-23	1,59E-23	4,64E-23	3,13E-23
4,07E-05	9,98E-13	3,52E-16	1,23E-19	6,12E-23	3,16E-26	5,45E-28	3,62E-28	8,28E-28	5,96E-28
2,03E-05	1,47E-13	5,59E-18	1,39E-21	6,91E-25	5,41E-28	3,21E-28	3,21E-28	3,21E-28	8,73E-27
1,02E-05	3,42E-14	1,76E-18	7,37E-23	3,16E-27	1,49E-27	1,49E-27	1,49E-27	1,43E-27	6,00E-26
5,09E-06	4,49E-15	1,27E-19	3,95E-24	6,60E-27	6,40E-27	6,40E-27	6,40E-27	1,49E-25	3,93E-22
2,54E-06	5,51E-16	7,83E-21	1,18E-25	1,05E-26	1,06E-26	1,06E-26	1,18E-26	1,32E-22	2,83E-18
1,27E-06	3,07E-17	3,39E-22	3,72E-26	4,09E-26	4,09E-26	4,09E-26	2,08E-25	2,43E-20	1,45E-16
6,36E-07	4,48E-18	5,35E-24	1,34E-25	1,34E-25	1,34E-25	1,34E-25	1,61E-23	9,17E-18	3,07E-13
3,18E-07	1,05E-18	2,27E-24	5,60E-25	5,60E-25	5,60E-25	5,63E-25	4,77E-22	4,02E-15	2,91E-10
1,59E-07	1,38E-19	7,24E-25	5,96E-25	5,96E-25	5,96E-25	1,23E-24	6,84E-19	1,53E-12	5,41E-07
7,95E-08	1,72E-20	2,74E-23	2,74E-23	2,74E-23	2,74E-23	4,44E-22	5,62E-16	3,04E-09	1,52E-03
3,97E-08	2,06E-21	3,65E-23	3,65E-23	3,65E-23	3,65E-23	4,49E-20	7,19E-15	8,73E-08	2,86E-01
1,99E-08	1,97E-22	8,01E-23	8,01E-23	8,01E-23	8,02E-23	9,19E-19	4,19E-12	2,49E-05	2,65E+02





Tabela 26 – Ordem efetiva (acurácia) com MER ( $pEm$ ), variável  $T_{max}$ , malha A.

$h$	$pEm, p = 2$	$pEm, p = 3$	$pEm, p = 4$	$pEm, p = 5$	$pEm, p = 6$	$pEm, p = 7$	$pEm, p = 8$	$pEm, p = 9$	$pEm, p = 10$
3,33E-01									
1,67E-01	4,00E+00								
8,33E-02	8,68E+00	7,18E+00	7,37E+00	6,89E+00	6,45E+00	6,59E+00	6,58E+00	6,78E+00	
4,17E-02	-4,81E+00	1,99E+00	6,92E-01	1,17E+00	3,02E+00	1,94E+00	2,21E+00	1,41E+00	6,15E+00
2,08E-02	2,25E+00	4,56E+00	6,32E+00	3,12E+00	2,34E+00	2,42E+00	2,46E+00	2,41E+00	2,80E+00
1,04E-02	4,08E+00	2,09E+00	3,52E-01	2,17E+00	4,21E+00	3,74E+00	3,92E+00	3,51E+00	3,60E+00
5,21E-03	2,79E+00	8,04E+00	4,57E+00	4,03E+00	5,21E+00	4,68E+00	4,83E+00	4,52E+00	4,57E+00
2,60E-03	2,10E+00	-3,06E-01	6,33E+00	5,00E+00	6,45E+00	6,20E+00	6,25E+00	6,14E+00	6,16E+00
1,30E-03	2,92E+00	3,71E+00	9,44E+00	6,34E+00	8,13E+00	8,05E+00	8,07E+00	8,03E+00	8,04E+00
6,51E-04	3,00E+00	4,00E+00	4,25E+00	8,09E+00	1,00E+01	1,00E+01	1,00E+01	1,00E+01	1,00E+01
3,26E-04	3,00E+00	4,01E+00	4,93E+00	1,01E+01	1,20E+01	1,20E+01	1,20E+01	1,20E+01	1,20E+01
1,63E-04	3,01E+00	4,04E+00	5,00E+00	1,34E+01	1,32E+01	1,40E+01	1,40E+01	1,40E+01	1,40E+01
8,14E-05	3,03E+00	4,04E+00	5,01E+00	4,12E+00	8,25E+00	1,55E+01	1,54E+01	1,58E+01	1,57E+01
4,07E-05	4,17E+00	4,54E+00	5,13E+00	5,99E+00	5,87E+00	7,66E-01	1,77E-01	1,37E+00	-3,87E+00
2,03E-05	2,76E+00	5,98E+00	6,47E+00	6,47E+00	-1,46E+00	-2,22E+00	-2,22E+00	-2,16E+00	-2,78E+00
1,02E-05	2,11E+00	1,67E+00	4,24E+00	7,77E+00	-2,10E+00	-2,10E+00	-2,10E+00	-6,70E+00	-1,27E+01
5,09E-06	2,93E+00	3,79E+00	4,22E+00	-1,06E+00	-7,20E-01	-7,20E-01	-8,77E-01	-9,80E+00	-1,28E+01
2,54E-06	3,03E+00	4,02E+00	5,07E+00	-6,77E-01	-1,95E+00	-1,95E+00	-4,15E+00	-7,52E+00	-5,69E+00
1,27E-06	4,16E+00	4,53E+00	1,66E+00	-1,95E+00	-1,72E+00	-1,71E+00	-6,28E+00	-8,56E+00	-1,10E+01
6,36E-07	2,78E+00	5,99E+00	-1,85E+00	-1,72E+00	-2,06E+00	-2,07E+00	-4,88E+00	-8,78E+00	-9,89E+00
3,18E-07	2,10E+00	1,24E+00	-2,06E+00	-2,06E+00	-8,97E-02	-1,13E+00	-1,05E+01	-8,57E+00	-1,09E+01
1,59E-07	2,92E+00	1,65E+00	-8,97E-02	-8,97E-02	-5,52E+00	-8,49E+00	-9,68E+00	-1,10E+01	-1,15E+01
7,95E-08	3,00E+00	-5,24E+00	-5,52E+00	-5,52E+00	-4,14E-01	-6,66E+00	-3,68E+00	-4,85E+00	-7,56E+00
3,97E-08	3,06E+00	-4,14E-01	-4,14E-01	-4,14E-01	-1,13E+00	-4,35E+00	-9,19E+00	-8,16E+00	-9,86E+00
1,99E-08	3,39E+00	-1,13E+00	-1,13E+00	-1,13E+00					

### A.3 RESULTADOS DA MALHA B

Para obter os resultados da malha B, é necessário obter as soluções analíticas exatas das variáveis  $T_{P_i}$ , porque conforme visto na Seção 3.3, são diferentes da malha A. Recomenda-se, caso leitor deseje reproduzir os resultados apresentados aqui, utilizar as precisões apresentadas nas equações abaixo, para obter as variáveis  $T_{P_i}$ :

- Pontos nodais em seu formato exato, malha B

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,00000006848086824246652783480604993306565 \\ 0,004450416609815583561796333617060659 \\ 0,06601997619768170273923335520142441 \\ 0,1825015320030303252664988679193034 \\ 0,3507063165589912058964907982452134 \\ 0,4971195627218540153191476157668754 \\ 0,5556918059603508995702198210259396 \\ 0,7155604842886549286727565948583396 \\ 0,8545639724923780929875890462514446 \end{bmatrix} \quad (\text{A.22})$$

- Aplicando estes pontos na Eq. (3.5), obtêm-se as soluções analíticas de cada temperatura em seu ponto nodal ( $P_i$ ):

$$\begin{bmatrix} T_{P_1} \\ T_{P_2} \\ T_{P_3} \\ T_{P_4} \\ T_{P_5} \\ T_{P_6} \\ T_{P_7} \\ T_{P_8} \\ T_{P_9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,8000001643540795612529940507665863844367107991343 \\ 1,8106630946795656064125715019304727530634914099043 \\ 1,9542528392506779132918509943093076083954334490053 \\ 2,2017179473286526762965210450679143944338582786992 \\ 2,4793763983044859692424099396034078199613408294247 \\ 2,6027330390567960243185263364796382295693379997604 \\ 2,6077444934684107359750508394490716249806405297414 \\ 2,4353981810316064359544218780245996496964446951469 \\ 1,9669592067959579729154708374176288059235084713212 \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

Estas operações matemáticas foram realizadas com o Maple, utilizando mais de 30 casas decimais. O restante das soluções analíticas exatas ( $x_{max}, T_{max}, \dots$ ), são as mesmas da Tabela 5.

### A.3.1 Variável $T_{P_i}$

Tabela 27 – Módulo do erro de discretização sem MER, variável  $T_{P_i}$ , malha B.

$h$	$ Eh, T_{P_1}$	$ Eh, T_{P_2}$	$ Eh, T_{P_3}$	$ Eh, T_{P_4}$	$ Eh, T_{P_5}$	$ Eh, T_{P_6}$	$ Eh, T_{P_7}$	$ Eh, T_{P_8}$	$ Eh, T_{P_9}$
1,000E-01	4,736E-09	3,077E-04	4,342E-03	1,054E-02	1,431E-02	1,799E-02	2,313E-02	1,762E-02	1,417E-02
5,000E-02	1,192E-09	7,743E-05	1,093E-03	2,655E-03	3,603E-03	4,528E-03	5,823E-03	4,433E-03	3,566E-03
2,500E-02	2,984E-10	1,939E-05	2,737E-04	6,649E-04	9,022E-04	1,134E-03	1,458E-03	1,110E-03	8,930E-04
1,250E-02	7,464E-11	4,849E-06	6,846E-05	1,663E-04	2,256E-04	2,836E-04	3,647E-04	2,776E-04	2,233E-04
6,250E-03	1,866E-11	1,212E-06	1,712E-05	4,158E-05	5,642E-05	7,092E-05	9,118E-05	6,941E-05	5,584E-05
3,125E-03	4,665E-12	3,031E-07	4,280E-06	1,039E-05	1,410E-05	1,773E-05	2,280E-05	1,735E-05	1,396E-05
1,563E-03	1,166E-12	7,578E-08	1,070E-06	2,599E-06	3,526E-06	4,433E-06	5,699E-06	4,338E-06	3,490E-06
7,813E-04	2,916E-13	1,894E-08	2,675E-07	6,497E-07	8,815E-07	1,108E-06	1,425E-06	1,085E-06	8,726E-07
3,906E-04	7,290E-14	4,736E-09	6,687E-08	1,624E-07	2,204E-07	2,770E-07	3,562E-07	2,711E-07	2,181E-07
1,953E-04	1,822E-14	1,184E-09	1,672E-08	4,061E-08	5,510E-08	6,926E-08	8,905E-08	6,779E-08	5,454E-08
9,766E-05	4,556E-15	2,960E-10	4,179E-09	1,015E-08	1,377E-08	1,732E-08	2,226E-08	1,695E-08	1,363E-08
4,883E-05	1,139E-15	7,400E-11	1,045E-09	2,538E-09	3,443E-09	4,329E-09	5,565E-09	4,237E-09	3,408E-09
2,441E-05	2,848E-16	1,850E-11	2,612E-10	6,345E-10	8,609E-10	1,082E-09	1,391E-09	1,059E-09	8,521E-10
1,221E-05	7,119E-17	4,625E-12	6,530E-11	1,586E-10	2,152E-10	2,705E-10	3,478E-10	2,648E-10	2,130E-10
6,104E-06	1,780E-17	1,156E-12	1,633E-11	3,965E-11	5,380E-11	6,764E-11	8,696E-11	6,620E-11	5,326E-11
3,052E-06	4,449E-18	2,891E-13	4,081E-12	9,913E-12	1,345E-11	1,691E-11	2,174E-11	1,655E-11	1,331E-11
1,526E-06	1,112E-18	7,227E-14	1,020E-12	2,478E-12	3,363E-12	4,227E-12	5,435E-12	4,137E-12	3,329E-12
7,629E-07	2,781E-19	1,807E-14	2,551E-13	6,196E-13	8,407E-13	1,057E-12	1,359E-12	1,034E-12	8,322E-13
3,815E-07	6,952E-20	4,517E-15	6,377E-14	1,549E-13	2,102E-13	2,642E-13	3,397E-13	2,586E-13	2,080E-13
1,907E-07	1,738E-20	1,129E-15	1,594E-14	3,872E-14	5,254E-14	6,605E-14	8,492E-14	6,465E-14	5,201E-14
9,537E-08	4,345E-21	2,823E-16	3,986E-15	9,681E-15	1,314E-14	1,651E-14	2,123E-14	1,616E-14	1,300E-14
4,768E-08	1,087E-21	7,057E-17	9,964E-16	2,420E-15	3,284E-15	4,128E-15	5,308E-15	4,040E-15	3,251E-15
2,384E-08	2,725E-22	1,764E-17	2,491E-16	6,051E-16	8,210E-16	1,032E-15	1,327E-15	1,010E-15	8,126E-16

Tabela 28 – Módulo do erro de discretização com MER, temperatura nos pontos nodais, malha B.

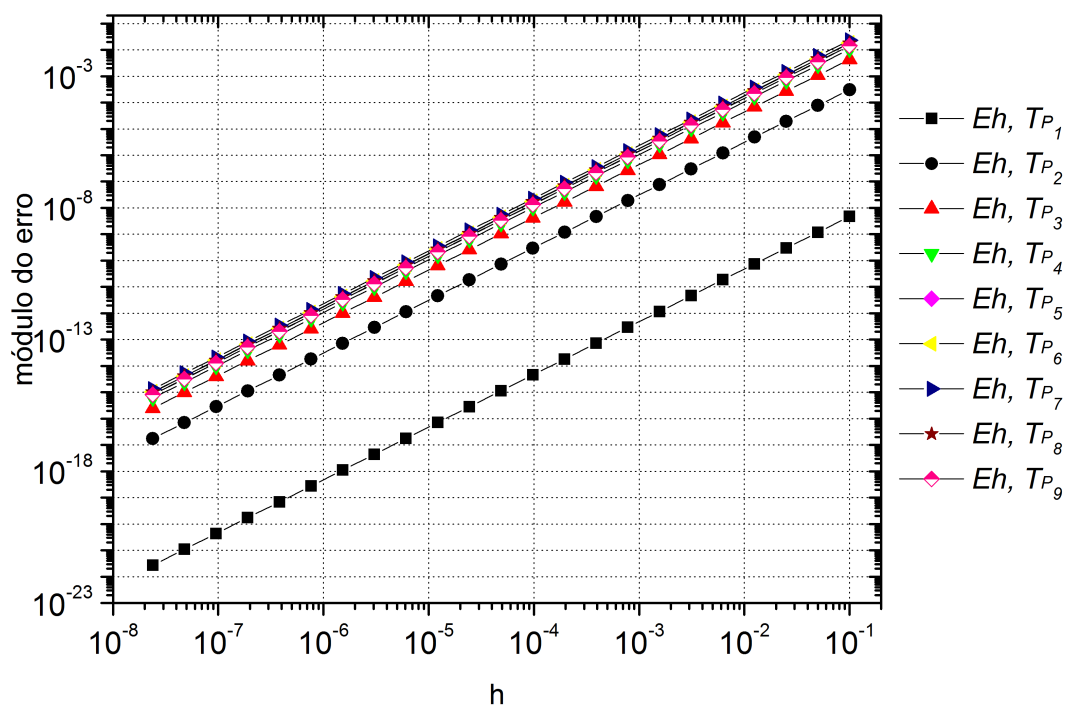
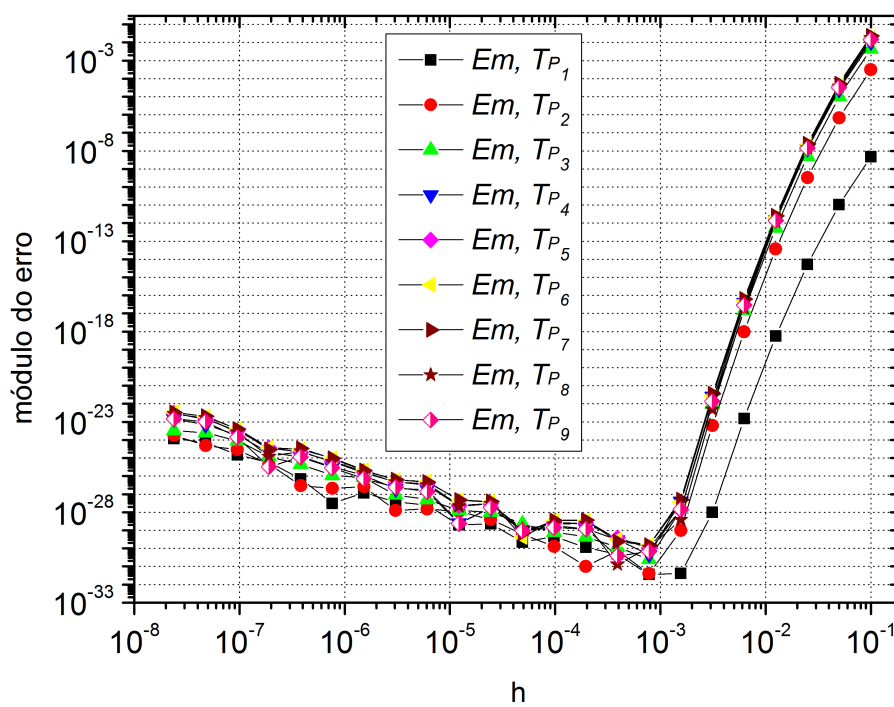
$h$	$Em, T_{P_1}$	$Em, T_{P_2}$	$Em, T_{P_3}$	$Em, T_{P_4}$	$Em, T_{P_5}$	$Em, T_{P_6}$	$Em, T_{P_7}$	$Em, T_{P_8}$	$Em, T_{P_9}$
1,000E-01	4,736E-09	3,077E-04	4,342E-03	1,054E-02	1,431E-02	1,799E-02	2,313E-02	1,762E-02	1,417E-02
5,000E-02	1,043E-11	6,778E-07	9,989E-06	2,572E-05	3,258E-05	4,197E-05	5,237E-05	3,659E-05	3,167E-05
2,500E-02	5,104E-15	3,317E-10	4,916E-09	1,304E-08	1,458E-08	1,964E-08	2,455E-08	1,454E-08	1,406E-08
1,250E-02	5,696E-19	3,702E-14	5,491E-13	1,482E-12	1,403E-12	2,024E-12	2,561E-12	1,188E-12	1,349E-12
6,250E-03	1,509E-23	9,808E-19	1,455E-17	3,968E-17	3,000E-17	4,806E-17	6,211E-17	1,949E-17	2,900E-17
3,125E-03	9,720E-29	6,317E-24	9,371E-23	2,571E-22	1,412E-22	2,685E-22	3,584E-22	4,892E-23	1,406E-22
1,563E-03	4,102E-32	9,862E-30	1,486E-28	4,094E-28	1,350E-28	3,551E-28	4,971E-28	3,844E-29	1,489E-28
7,813E-04	3,524E-32	3,987E-32	2,436E-31	4,688E-31	1,052E-30	1,485E-30	1,468E-30	1,104E-30	6,687E-31
3,906E-04	4,799E-31	7,369E-31	1,167E-30	2,918E-30	3,794E-30	3,044E-30	2,394E-30	1,310E-31	3,846E-31
1,953E-04	1,130E-30	1,001E-31	4,332E-30	1,248E-29	2,432E-29	3,555E-29	3,714E-29	2,372E-29	1,197E-29
9,766E-05	4,512E-30	1,269E-30	8,000E-30	1,733E-29	2,603E-29	3,395E-29	3,499E-29	2,214E-29	1,393E-29
4,883E-05	2,209E-30	6,267E-30	2,297E-29	1,020E-29	9,615E-30	4,235E-30	6,977E-30	1,162E-29	9,462E-30
2,441E-05	2,270E-29	3,937E-29	1,014E-28	1,720E-28	3,027E-28	3,807E-28	3,896E-28	2,959E-28	1,845E-28
1,221E-05	2,012E-29	1,098E-28	1,241E-28	2,520E-29	2,352E-28	4,533E-28	4,743E-28	2,170E-28	2,350E-29
6,104E-06	2,482E-28	1,494E-28	5,110E-28	1,867E-27	3,805E-27	4,962E-27	4,734E-27	3,162E-27	1,366E-27
3,052E-06	3,695E-28	1,275E-28	9,084E-28	1,964E-27	4,615E-27	6,073E-27	6,338E-27	4,716E-27	2,473E-27
1,526E-06	1,180E-27	2,547E-27	8,300E-27	1,079E-26	1,757E-26	2,117E-26	2,002E-26	1,505E-26	7,043E-27
7,629E-07	3,086E-28	2,051E-27	1,093E-26	3,265E-26	6,793E-26	9,739E-26	9,515E-26	6,110E-26	2,865E-26
3,815E-07	6,899E-27	3,011E-27	4,426E-26	1,173E-25	2,140E-25	3,056E-25	3,349E-25	2,351E-25	1,134E-25
1,907E-07	5,813E-26	4,633E-26	1,170E-25	2,038E-25	3,608E-25	3,743E-25	2,927E-25	1,208E-25	3,278E-26
9,537E-08	1,476E-25	2,864E-25	9,083E-25	1,906E-24	3,186E-24	4,038E-24	4,054E-24	2,722E-24	1,425E-24
4,768E-08	7,281E-25	4,904E-25	2,539E-24	6,839E-24	1,378E-23	2,014E-23	2,018E-23	1,649E-23	1,038E-23
2,384E-08	1,166E-24	1,815E-24	3,325E-24	1,485E-23	3,010E-23	3,423E-23	3,269E-23	2,759E-23	1,434E-23

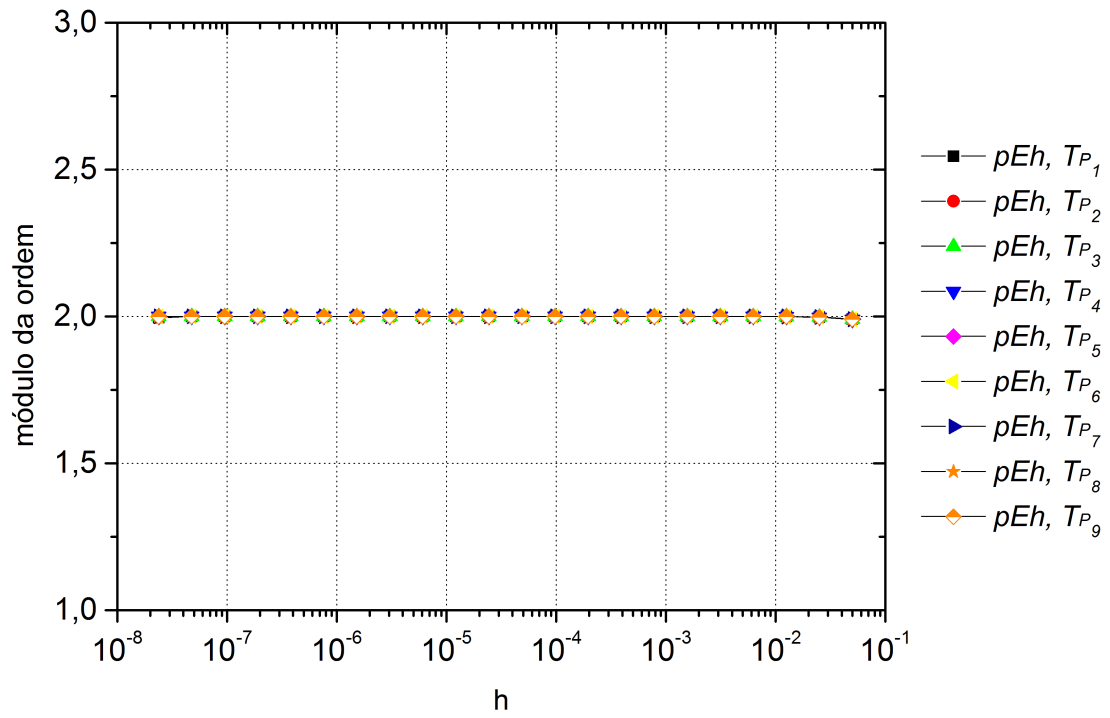
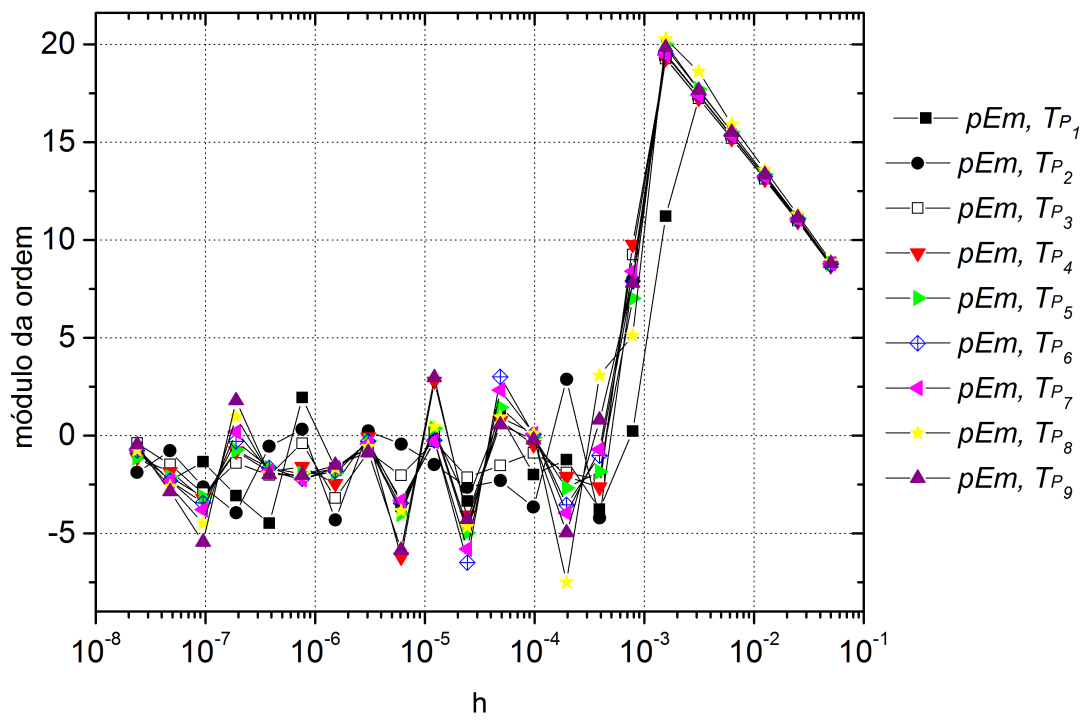


Tabela 30 – Ordem efetiva com MER, temperatura nos pontos nodais, malha B.

h	$pEm, T_{P_1}$	$pEm, T_{P_2}$	$pEm, T_{P_3}$	$pEm, T_{P_4}$	$pEm, T_{P_5}$	$pEm, T_{P_6}$	$pEm, T_{P_7}$	$pEm, T_{P_8}$	$pEm, T_{P_9}$
1,000E-01									
5,000E-02	8,827E+00	8,826E+00	8,764E+00	8,679E+00	8,779E+00	8,743E+00	8,787E+00	8,912E+00	8,805E+00
2,500E-02	1,100E+01	1,100E+01	1,099E+01	1,095E+01	1,113E+01	1,106E+01	1,106E+01	1,130E+01	1,114E+01
1,250E-02	1,313E+01	1,313E+01	1,313E+01	1,310E+01	1,334E+01	1,324E+01	1,323E+01	1,358E+01	1,335E+01
6,250E-03	1,520E+01	1,520E+01	1,520E+01	1,519E+01	1,551E+01	1,536E+01	1,533E+01	1,590E+01	1,550E+01
3,125E-03	1,724E+01	1,724E+01	1,724E+01	1,724E+01	1,770E+01	1,745E+01	1,740E+01	1,860E+01	1,765E+01
1,563E-03	1,121E+01	1,929E+01	1,927E+01	1,926E+01	2,000E+01	1,953E+01	1,946E+01	2,028E+01	1,985E+01
7,813E-04	2,190E-01	7,951E+00	9,252E+00	9,770E+00	7,003E+00	7,902E+00	8,404E+00	5,122E+00	7,799E+00
3,906E-04	-3,767E+00	-4,208E+00	-2,261E+00	-2,638E+00	-1,850E+00	-1,035E+00	-7,062E-01	3,075E+00	7,979E-01
1,953E-04	-1,236E+00	2,879E+00	-1,891E+00	-2,096E+00	-2,680E+00	-3,546E+00	-3,955E+00	-7,501E+00	-4,960E+00
9,766E-05	-1,997E+00	-3,664E+00	-8,851E-01	-4,743E-01	-9,785E-02	6,606E-02	8,619E-02	9,903E-02	-2,186E-01
4,883E-05	1,031E+00	-2,304E+00	-1,522E+00	7,652E-01	1,437E+00	3,003E+00	2,326E+00	9,298E-01	5,583E-01
2,441E-05	-3,361E+00	-2,651E+00	-2,142E+00	-4,076E+00	-4,977E+00	-6,490E+00	-5,803E+00	-4,670E+00	-4,286E+00
1,221E-05	1,744E-01	-1,479E+00	-2,921E-01	2,771E+00	3,642E-01	-2,518E-01	-2,836E-01	4,476E-01	2,973E+00
6,104E-06	-3,625E+00	-4,450E-01	-2,041E+00	-6,211E+00	-4,016E+00	-3,452E+00	-3,319E+00	-3,865E+00	-5,861E+00
3,052E-06	-5,739E-01	2,294E-01	-8,301E-01	-7,366E-02	-2,785E-01	-2,914E-01	-4,208E-01	-5,769E-01	-8,562E-01
1,526E-06	-1,675E+00	-4,321E+00	-3,192E+00	-2,457E+00	-1,929E+00	-1,802E+00	-1,659E+00	-1,674E+00	-1,510E+00
7,629E-07	1,934E+00	3,126E-01	-3,978E-01	-1,597E+00	-1,951E+00	-2,202E+00	-2,249E+00	-2,021E+00	-2,024E+00
3,815E-07	-4,482E+00	-5,540E-01	-2,017E+00	-1,845E+00	-1,655E+00	-1,650E+00	-1,816E+00	-1,944E+00	-1,984E+00
1,907E-07	-3,075E+00	-3,944E+00	-1,402E+00	-7,970E-01	-7,540E-01	-2,924E-01	1,944E-01	9,607E-01	1,790E+00
9,537E-08	-1,344E+00	-2,628E+00	-2,957E+00	-3,225E+00	-3,143E+00	-3,432E+00	-3,792E+00	-4,494E+00	-5,442E+00
4,768E-08	-2,303E+00	-7,761E-01	-1,483E+00	-1,843E+00	-2,113E+00	-2,319E+00	-2,315E+00	-2,599E+00	-2,864E+00
2,384E-08	-6,788E-01	-1,888E+00	-3,889E-01	-1,119E+00	-1,127E+00	-7,647E-01	-6,960E-01	-7,425E-01	-4,670E-01



(a)  $Eh$ .(b)  $Em$ .Figura 40 –  $Eh$  e  $Em$  dos pontos nodais ( $T_{P_i}$ ), malha B.

(a)  $pEh$ .(b)  $pEm$ .Figura 41 –  $pEh$  e  $pEm$  dos pontos nodais ( $T_{P_I}$ ), malha B.

## A.3.2 Temperatura média

Tabela 31 – Resultados, Temperatura média ( $T_m$ ), malha B.

$h$	$Eh$	$Em$	$pEh$	$pEm$
1,000E-01	3,289E-02	3,289E-02		
5,000E-02	8,317E-03	1,269E-04	1,983E+00	8,017E+00
2,500E-02	2,085E-03	8,684E-08	1,996E+00	1,051E+01
1,250E-02	5,217E-04	1,240E-11	1,999E+00	1,277E+01
6,250E-03	1,304E-04	3,999E-16	2,000E+00	1,492E+01
3,125E-03	3,261E-05	3,033E-21	2,000E+00	1,701E+01
1,563E-03	8,153E-06	5,539E-27	2,000E+00	1,906E+01
7,813E-04	2,038E-06	-8,247E-31	2,000E+00	1,271E+01
3,906E-04	5,096E-07	-1,735E-30	2,000E+00	-1,073E+00
1,953E-04	1,274E-07	1,893E-29	2,000E+00	-3,447E+00
9,766E-05	3,185E-08	-1,987E-29	2,000E+00	-7,043E-02
4,883E-05	7,962E-09	-2,058E-30	2,000E+00	3,271E+00
2,441E-05	1,990E-09	-2,380E-28	2,000E+00	-6,853E+00
1,221E-05	4,976E-10	-1,501E-28	2,000E+00	6,651E-01
6,104E-06	1,244E-10	2,619E-27	2,000E+00	-4,125E+00
3,052E-06	3,110E-11	3,519E-27	2,000E+00	-4,263E-01
1,526E-06	7,775E-12	-1,287E-26	2,000E+00	-1,870E+00
7,629E-07	1,944E-12	-5,009E-26	2,000E+00	-1,961E+00
3,815E-07	4,860E-13	1,747E-25	2,000E+00	-1,802E+00
1,907E-07	1,215E-13	1,909E-25	2,000E+00	-1,277E-01
9,537E-08	3,037E-14	2,343E-24	2,000E+00	-3,618E+00
4,768E-08	7,593E-15	-1,169E-23	2,000E+00	-2,318E+00
2,384E-08	1,898E-15	-2,087E-23	2,000E+00	-8,366E-01

A.3.3 Inclinação  $\left(\frac{dT}{dx}\right)\big|_x$ A.3.3.1 Inclinação,  $x = 0$ Tabela 32 – Resultados, inclinação,  $x = 0$ , malha B.

	$h$	$ Eh$	$ Em$	$ pEh$	$ pEm$
1,00000E-01	6,91516E-02	6,91516E-02			
5,00000E-02	1,74021E-02	1,52293E-04	1,99050E+00	8,82677E+00	
2,50000E-02	4,35772E-03	7,45304E-08	1,99762E+00	1,09967E+01	
1,25000E-02	1,08988E-03	8,31778E-12	1,99940E+00	1,31293E+01	
6,25000E-03	2,72498E-04	2,20374E-16	1,99985E+00	1,52040E+01	
3,12500E-03	6,81264E-05	1,41935E-21	1,99996E+00	1,72444E+01	
1,56250E-03	1,70317E-05	-7,60759E-25	1,99999E+00	1,08655E+01	
7,81250E-04	4,25793E-06	-9,53704E-25	2,00000E+00	-3,26102E-01	
3,90630E-04	1,06448E-06	-9,24347E-24	2,00000E+00	-3,27682E+00	
1,95310E-04	2,66121E-07	-3,70595E-23	2,00000E+00	-2,00334E+00	
9,76560E-05	6,65302E-08	-1,16950E-22	2,00000E+00	-1,65798E+00	
4,88280E-05	1,66326E-08	-2,44490E-22	2,00000E+00	-1,06388E+00	
2,44140E-05	4,15814E-09	-9,02930E-22	2,00000E+00	-1,88484E+00	
1,22070E-05	1,03953E-09	-1,69294E-21	2,00000E+00	-9,06845E-01	
6,10350E-06	2,59884E-10	2,16413E-21	2,00000E+00	-3,54259E-01	
3,05180E-06	6,49709E-11	-2,55612E-21	2,00000E+00	-2,40163E-01	
1,52590E-06	1,62427E-11	-1,73705E-20	2,00000E+00	-2,76461E+00	
7,62940E-07	4,06068E-12	-1,10896E-20	2,00000E+00	6,47428E-01	
3,81470E-07	1,01517E-12	1,69367E-19	2,00000E+00	-3,93287E+00	
1,90730E-07	2,53793E-13	1,03886E-18	2,00000E+00	-2,61678E+00	
9,53670E-08	6,34513E-14	4,13532E-18	1,99993E+00	-1,99299E+00	
4,76840E-08	1,58775E-14	2,09084E-17	1,99867E+00	-2,33801E+00	
2,38420E-08	4,00584E-15	5,12137E-17	1,98680E+00	-1,29245E+00	

A.3.3.2 Inclinação,  $x = 1$ Tabela 33 – Resultados, inclinação,  $x = 1$ , malha B.

	$h$	$ Eh$	$ Em$	$ pEh$	$ pEm$
1,00000E-01	6,82966E-01	6,82966E-01			
5,00000E-02	1,95767E-01	3,33670E-02	1,80268E+00	4,35532E+00	
2,50000E-02	5,24370E-02	5,59519E-04	1,90048E+00	5,89809E+00	
1,25000E-02	1,35713E-02	3,53270E-06	1,95003E+00	7,30727E+00	
6,25000E-03	3,45222E-03	9,25620E-09	1,97496E+00	8,57613E+00	
3,12500E-03	8,70586E-04	1,07608E-11	1,98747E+00	9,74850E+00	
1,56250E-03	2,18594E-04	5,47726E-15	1,99373E+00	1,09400E+01	
7,81250E-04	5,47675E-05	1,14582E-18	1,99686E+00	1,22229E+01	
3,90630E-04	1,37068E-05	9,97287E-23	1,99843E+00	1,34880E+01	
1,95310E-04	3,42855E-06	4,64622E-27	1,99922E+00	1,43897E+01	
9,76560E-05	8,57371E-07	1,63097E-28	1,99961E+00	4,83225E+00	
4,88280E-05	2,14372E-07	1,55056E-28	1,99980E+00	7,29422E-02	
2,44140E-05	5,35966E-08	1,56102E-27	1,99990E+00	-3,33163E+00	
1,22070E-05	1,33996E-08	9,13199E-30	1,99995E+00	7,41735E+00	
6,10350E-06	3,34996E-09	1,20129E-26	1,99998E+00	-1,03614E+01	
3,05180E-06	8,37497E-10	1,52121E-26	1,99999E+00	-3,40639E-01	
1,52590E-06	2,09375E-10	4,34160E-26	1,99999E+00	-1,51301E+00	
7,62940E-07	5,23439E-11	2,61731E-25	2,00000E+00	-2,59179E+00	
3,81470E-07	1,30860E-11	1,08188E-24	2,00000E+00	-2,04738E+00	
1,90730E-07	3,27150E-12	1,86969E-26	2,00000E+00	5,85459E+00	
9,53670E-08	8,17875E-13	1,08997E-23	2,00000E+00	-9,18728E+00	
4,76840E-08	2,04469E-13	9,83064E-23	2,00000E+00	-3,17299E+00	
2,38420E-08	5,11172E-14	9,02543E-23	2,00000E+00	1,23289E-01	

#### A.3.4 Variável $T_{2/3}$

Tabela 34 – módulo de  $Eh$ , variável  $T_{2/3}$ , malha B.

$h$	$Eh, p = 1$	$Eh, p = 2$	$Eh, p = 3$	$Eh, p = 4$	$Eh, p = 5$	$Eh, p = 6$	$Eh, p = 7$	$Eh, p = 8$	$Eh, p = 9$	$Eh, p = 10$
1,00E-01	5,34E-02	1,16E-02	2,07E-02	2,02E-02	2,12E-02	4,81E-03	4,70E-03	4,77E-03	4,70E-03	4,75E-03
5,00E-02	1,53E-02	6,06E-03	4,86E-03	4,88E-03	4,72E-03	1,26E-03	1,26E-03	1,26E-03	1,26E-03	1,26E-03
2,50E-02	3,06E-03	1,17E-03	1,27E-03	1,26E-03	1,26E-03	3,14E-04	3,14E-04	3,14E-04	3,14E-04	3,14E-04
1,25E-02	9,69E-04	2,95E-04	3,15E-04	3,14E-04	3,14E-04	7,86E-05	7,86E-05	7,86E-05	7,86E-05	7,86E-05
6,25E-03	1,42E-04	7,93E-05	7,86E-05	7,86E-05	7,86E-05	1,97E-05	1,97E-05	1,97E-05	1,97E-05	1,97E-05
3,13E-03	4,76E-05	1,98E-05	1,97E-05	1,97E-05	1,97E-05	4,91E-06	4,91E-06	4,91E-06	4,91E-06	4,91E-06
1,56E-03	1,51E-05	4,95E-06	4,91E-06	4,91E-06	4,91E-06	1,23E-06	1,23E-06	1,23E-06	1,23E-06	1,23E-06
7,81E-04	2,53E-06	1,23E-06	1,23E-06	1,23E-06	1,23E-06	3,07E-07	3,07E-07	3,07E-07	3,07E-07	3,07E-07
3,91E-04	8,46E-07	3,07E-07	3,07E-07	3,07E-07	3,07E-07	7,68E-08	7,68E-08	7,68E-08	7,68E-08	7,68E-08
1,95E-04	2,34E-07	7,68E-08	7,68E-08	7,68E-08	7,68E-08	1,92E-08	1,92E-08	1,92E-08	1,92E-08	1,92E-08
9,77E-05	4,29E-08	1,92E-08	1,92E-08	1,92E-08	1,92E-08	4,80E-09	4,80E-09	4,80E-09	4,80E-09	4,80E-09
4,88E-05	1,41E-08	4,80E-09	4,80E-09	4,80E-09	4,80E-09	1,20E-09	1,20E-09	1,20E-09	1,20E-09	1,20E-09
2,44E-05	3,29E-09	1,20E-09	1,20E-09	1,20E-09	1,20E-09	3,00E-10	3,00E-10	3,00E-10	3,00E-10	3,00E-10
1,22E-05	9,17E-10	3,00E-10	3,00E-10	3,00E-10	3,00E-10	7,50E-11	7,50E-11	7,50E-11	7,50E-11	7,50E-11
6,10E-06	1,60E-10	7,50E-11	7,50E-11	7,50E-11	7,50E-11	1,87E-11	1,87E-11	1,87E-11	1,87E-11	1,87E-11
3,05E-06	5,32E-11	1,87E-11	1,87E-11	1,87E-11	1,87E-11	4,69E-12	4,69E-12	4,69E-12	4,69E-12	4,69E-12
1,53E-06	1,38E-11	4,69E-12	4,69E-12	4,69E-12	4,69E-12	1,17E-12	1,17E-12	1,17E-12	1,17E-12	1,17E-12
7,63E-07	3,18E-12	1,17E-12	1,17E-12	1,17E-12	1,17E-12	2,93E-13	2,93E-13	2,93E-13	2,93E-13	2,93E-13
3,81E-07	9,00E-13	2,93E-13	2,93E-13	2,93E-13	2,93E-13	7,32E-14	7,32E-14	7,32E-14	7,32E-14	7,32E-14
1,91E-07	1,44E-13	7,32E-14	7,32E-14	7,32E-14	7,32E-14	1,83E-14	1,83E-14	1,83E-14	1,83E-14	1,83E-14
9,54E-08	4,83E-14	1,83E-14	1,83E-14	1,83E-14	1,83E-14	4,58E-15	4,58E-15	4,58E-15	4,58E-15	4,58E-15
4,77E-08	1,42E-14	4,58E-15	4,58E-15	4,58E-15	4,58E-15	1,14E-15	1,14E-15	1,14E-15	1,14E-15	1,14E-15
2,38E-08	1,66E-15	1,14E-15	1,14E-15	1,14E-15	1,14E-15	4,70E-03	4,70E-03	4,70E-03	4,70E-03	4,70E-03

Tabela 35 – módulo de  $Em$ , variável  $T_{2/3}$ , malha B.

$h$	$Em, p = 1$	$Em, p = 2$	$Em, p = 3$	$Em, p = 4$	$Em, p = 5$	$Em, p = 6$	$Em, p = 7$	$Em, p = 8$	$Em, p = 9$	$Em, p = 10$
1,00E-01	5,34E-02	1,16E-02	2,07E-02	2,02E-02	2,12E-02	4,81E-03	4,70E-03	4,77E-03	4,70E-03	4,75E-03
5,00E-02	2,55E-03	4,22E-03	4,39E-04	2,34E-04	7,64E-04	7,86E-05	1,13E-04	9,24E-05	1,18E-04	1,01E-04
2,50E-02	1,25E-03	7,80E-04	1,06E-04	7,10E-05	1,62E-04	6,32E-06	8,56E-06	7,71E-06	9,91E-06	8,91E-06
1,25E-02	3,84E-04	4,94E-05	9,23E-06	5,33E-06	9,94E-06	2,13E-07	2,27E-07	2,94E-07	3,34E-07	3,79E-07
6,25E-03	1,71E-04	6,93E-06	5,73E-08	1,37E-07	1,83E-07	4,61E-09	3,37E-09	7,73E-09	6,39E-09	1,07E-08
3,13E-03	2,99E-05	6,66E-07	2,08E-08	1,02E-09	1,19E-09	5,08E-11	2,93E-11	9,40E-11	6,23E-11	1,32E-10
1,56E-03	2,95E-06	3,08E-09	2,78E-10	2,60E-12	2,87E-12	1,81E-13	9,62E-14	3,45E-13	2,11E-13	4,86E-13
7,81E-04	2,16E-06	1,51E-08	2,71E-11	3,91E-14	2,08E-15	1,72E-16	8,98E-17	3,31E-16	1,99E-16	4,68E-16
3,91E-04	4,66E-07	1,35E-09	4,02E-12	1,10E-14	3,07E-17	4,39E-20	2,17E-20	8,06E-20	4,81E-20	1,14E-19
1,95E-04	4,13E-09	2,33E-10	9,05E-14	1,90E-16	8,97E-19	1,08E-23	1,36E-24	4,91E-24	2,93E-24	6,93E-24
9,77E-05	2,49E-08	5,28E-11	2,71E-14	1,21E-17	3,26E-21	1,47E-25	3,01E-29	6,81E-29	3,78E-29	9,88E-29
4,88E-05	6,81E-09	3,13E-12	1,40E-15	5,94E-19	3,26E-22	2,07E-27	3,27E-28	3,26E-28	3,05E-28	1,19E-27
2,44E-05	7,77E-10	4,51E-13	2,32E-17	7,20E-21	4,46E-24	3,03E-28	3,08E-28	3,08E-28	2,20E-26	4,63E-22
1,22E-05	1,74E-10	1,05E-13	7,17E-18	3,68E-22	9,31E-27	5,58E-27	5,58E-27	5,43E-27	3,71E-24	2,52E-18
6,10E-06	1,12E-10	1,36E-14	5,49E-19	1,97E-23	2,51E-27	3,69E-27	3,69E-27	1,62E-25	6,03E-21	8,96E-16
3,05E-06	2,77E-11	7,52E-16	2,68E-20	5,98E-25	5,60E-27	7,02E-26	7,00E-26	1,03E-22	2,01E-17	3,27E-12
1,53E-06	1,04E-12	1,11E-16	1,10E-22	2,34E-26	1,67E-26	1,67E-26	1,67E-26	1,62E-25	2,55E-20	5,12E-10
7,63E-07	4,20E-13	2,58E-17	1,06E-22	7,05E-26	7,02E-26	2,74E-25	3,01E-25	2,66E-18	1,06E-12	4,04E-06
3,81E-07	1,87E-13	3,38E-18	8,39E-24	2,74E-25	2,74E-25	1,69E-25	2,72E-24	7,65E-17	1,24E-09	7,48E-04
1,91E-07	1,31E-13	4,10E-19	3,61E-25	1,69E-25	1,69E-25	3,14E-24	3,22E-22	1,33E-13	1,95E-06	2,97E+00
9,54E-08	2,79E-14	2,22E-20	3,16E-24	3,14E-24	3,14E-24	1,78E-23	1,03E-20	5,07E-11	7,47E-04	2,84E+02
4,77E-08	1,42E-15	3,32E-21	1,78E-23	1,78E-23	1,78E-23	3,22E-23	8,05E-19			
2,38E-08	2,98E-15	6,95E-22	3,14E-23	3,14E-23	3,14E-23					





Tabela 37 – Ordem efetiva com MER ( $pEm$ ), variável  $T_{2/3}$ , malha B.

$h$	$pEm, p=1$	$pEm, p=2$	$pEm, p=3$	$pEm, p=4$	$pEm, p=5$	$pEm, p=6$	$pEm, p=7$	$pEm, p=8$	$pEm, p=9$	$pEm, p=10$
1,00E-01										
5,00E-02	4,39E+00	1,46E+00	5,56E+00	6,44E+00	4,79E+00					
2,50E-02	1,03E+00	2,44E+00	2,05E+00	1,72E+00	2,23E+00	5,93E+00	5,37E+00	5,69E+00	5,31E+00	5,56E+00
1,25E-02	1,70E+00	3,98E+00	3,52E+00	3,73E+00	4,03E+00	3,64E+00	3,73E+00	3,58E+00	3,58E+00	3,50E+00
6,25E-03	1,17E+00	2,83E+00	7,33E+00	5,28E+00	5,76E+00	4,89E+00	5,24E+00	4,71E+00	4,89E+00	4,55E+00
3,13E-03	2,52E+00	3,38E+00	1,46E+00	7,06E+00	7,27E+00	5,53E+00	6,08E+00	5,25E+00	5,71E+00	5,15E+00
1,56E-03	3,34E+00	7,76E+00	6,22E+00	8,62E+00	8,69E+00	6,50E+00	6,85E+00	6,36E+00	6,68E+00	6,34E+00
7,81E-04	4,55E-01	-2,30E+00	3,36E+00	6,05E+00	1,04E+01	8,13E+00	8,25E+00	8,09E+00	8,20E+00	8,09E+00
3,91E-04	2,21E+00	3,49E+00	2,75E+00	1,83E+00	6,08E+00	1,00E+01	1,01E+01	1,00E+01	1,01E+01	1,00E+01
1,95E-04	6,82E+00	2,54E+00	5,47E+00	5,86E+00	5,10E+00	1,19E+01	1,20E+01	1,20E+01	1,20E+01	1,20E+01
9,77E-05	-2,59E+00	2,14E+00	1,74E+00	3,97E+00	8,10E+00	1,20E+01	1,40E+01	1,40E+01	1,40E+01	1,40E+01
4,88E-05	1,87E+00	4,08E+00	4,27E+00	4,35E+00	3,32E+00	6,19E+00	1,55E+01	1,61E+01	1,62E+01	1,61E+01
2,44E-05	3,13E+00	2,80E+00	5,92E+00	6,37E+00	6,19E+00	6,16E+00	-3,44E+00	-2,26E+00	-3,12E+00	-3,59E+00
1,22E-05	2,16E+00	2,10E+00	1,70E+00	4,29E+00	8,90E+00	2,77E+00	8,87E-02	8,45E-02	1,07E-01	-9,48E+00
6,10E-06	6,29E-01	2,95E+00	3,71E+00	4,22E+00	1,89E+00	-3,61E+00	-3,58E+00	-3,58E+00	-6,18E+00	-9,08E+00
3,05E-06	2,02E+00	4,17E+00	4,36E+00	5,04E+00	-1,16E+00	-5,97E-01	-5,97E-01	-5,59E-01	-7,39E+00	-1,24E+01
1,53E-06	4,74E+00	2,76E+00	7,93E+00	4,68E+00	-1,57E+00	-1,58E+00	-1,58E+00	-4,90E+00	-1,07E+01	-8,48E+00
7,63E-07	1,31E+00	2,11E+00	4,26E-02	-1,59E+00	-2,07E+00	-2,07E+00	-2,07E+00	-9,32E+00	-1,17E+01	-1,18E+01
3,81E-07	1,17E+00	2,93E+00	3,66E+00	-1,96E+00	-1,96E+00	-1,96E+00	-2,10E+00	-7,95E+00	-5,61E+00	-7,29E+00
1,91E-07	5,11E-01	3,04E+00	4,54E+00	6,98E-01	6,98E-01	6,98E-01	-3,17E+00	-6,70E+00	-1,01E+01	-1,29E+01
9,54E-08	2,23E+00	4,20E+00	-3,13E+00	-4,21E+00	-4,21E+00	-4,21E+00	-6,89E+00	-4,85E+00	-1,02E+01	-7,53E+00
4,77E-08	4,29E+00	2,74E+00	-2,50E+00	-2,51E+00	-2,51E+00	-2,51E+00	-5,01E+00	-1,08E+01	-1,06E+01	-1,20E+01
2,38E-08	-1,07E+00	2,26E+00	-8,18E-01	-8,18E-01	-8,18E-01	-8,54E-01	-6,28E+00	-8,57E+00	-8,58E+00	-6,57E+00

### A.3.5 Variável $x_{max}$

Tabela 38 – Módulo de  $Eh$ , variável  $x_{max}$ , malha B.

$h$	$Eh, p = 2$	$Eh, p = 3$	$Eh, p = 4$	$Eh, p = 5$	$Eh, p = 6$	$Eh, p = 7$	$Eh, p = 8$	$Eh, p = 9$	$Eh, p = 10$
1,00E-01	1,04E-02	1,01E-02	1,01E-02	1,01E-02	1,02E-02	1,02E-02	1,02E-02	1,02E-02	
5,00E-02	2,81E-03	2,58E-03	2,58E-03	2,61E-03	2,62E-03	2,63E-03	2,64E-03	2,64E-03	2,65E-03
2,50E-02	6,80E-04	6,37E-04	6,19E-04	6,15E-04	6,18E-04	6,16E-04	6,17E-04	6,16E-04	6,17E-04
1,25E-02	1,70E-04	1,53E-04	1,53E-04	1,53E-04	1,53E-04	1,53E-04	1,53E-04	1,53E-04	1,53E-04
6,25E-03	4,37E-05	3,83E-05	3,83E-05	3,83E-05	3,83E-05	3,83E-05	3,83E-05	3,83E-05	3,83E-05
3,13E-03	1,00E-05	9,58E-06	9,58E-06	9,58E-06	9,58E-06	9,58E-06	9,58E-06	9,58E-06	9,58E-06
1,56E-03	2,81E-06	2,40E-06	2,40E-06	2,40E-06	2,40E-06	2,40E-06	2,40E-06	2,40E-06	2,40E-06
7,81E-04	7,04E-07	5,99E-07	5,99E-07	5,99E-07	5,99E-07	5,99E-07	5,99E-07	5,99E-07	5,99E-07
3,91E-04	1,76E-07	1,50E-07	1,50E-07	1,50E-07	1,50E-07	1,50E-07	1,50E-07	1,50E-07	1,50E-07
1,95E-04	4,39E-08	3,74E-08	3,74E-08	3,74E-08	3,74E-08	3,74E-08	3,74E-08	3,74E-08	3,74E-08
9,77E-05	1,09E-08	9,36E-09	9,36E-09	9,36E-09	9,36E-09	9,36E-09	9,36E-09	9,36E-09	9,36E-09
4,88E-05	2,69E-09	2,34E-09	2,34E-09	2,34E-09	2,34E-09	2,34E-09	2,34E-09	2,34E-09	2,34E-09
2,44E-05	6,24E-10	5,85E-10	5,85E-10	5,85E-10	5,85E-10	5,85E-10	5,85E-10	5,85E-10	5,85E-10
1,22E-05	1,71E-10	1,46E-10	1,46E-10	1,46E-10	1,46E-10	1,46E-10	1,46E-10	1,46E-10	1,46E-10
6,10E-06	4,23E-11	3,66E-11	3,66E-11	3,66E-11	3,66E-11	3,66E-11	3,66E-11	3,66E-11	3,66E-11
3,05E-06	1,01E-11	9,14E-12	9,14E-12	9,14E-12	9,14E-12	9,14E-12	9,14E-12	9,14E-12	9,14E-12
1,53E-06	2,58E-12	2,29E-12	2,29E-12	2,29E-12	2,29E-12	2,29E-12	2,29E-12	2,29E-12	2,29E-12
7,63E-07	6,18E-13	5,71E-13	5,71E-13	5,71E-13	5,71E-13	5,71E-13	5,71E-13	5,80E-13	2,53E-09
3,81E-07	1,66E-13	1,43E-13	1,43E-13	1,43E-13	1,43E-13	1,43E-13	1,43E-13	3,45E-12	4,94E-08
1,91E-07	4,00E-14	3,57E-14	3,57E-14	3,57E-14	3,57E-14	3,57E-14	3,66E-14	5,43E-10	5,41E-08
9,54E-08	9,89E-15	8,93E-15	8,93E-15	8,93E-15	8,93E-15	8,93E-15	3,14E-14	2,39E-07	2,63E-03
4,77E-08	2,53E-15	2,23E-15	2,23E-15	2,23E-15	2,23E-15	2,23E-15	6,82E-12	4,65E-05	3,40E-08
2,38E-08	6,01E-16	5,58E-16	5,58E-16	5,58E-16	5,58E-16	9,25E-17	2,83E-08	1,46E-04	6,25E-09

Tabela 39 – Módulo de  $Em$ , variável  $x_{max}$ , malha B.

$h$	$Em, p = 2$	$Em, p = 3$	$Em, p = 4$	$Em, p = 5$	$Em, p = 6$	$Em, p = 7$	$Em, p = 8$	$Em, p = 9$	$Em, p = 10$
1,00E-01	1,04E-02	1,01E-02	1,01E-02	1,01E-02	1,02E-02	1,02E-02	1,02E-02	1,02E-02	
5,00E-02	2,88E-04	5,99E-05	6,67E-05	1,14E-04	9,28E-05	1,15E-04	1,06E-04	1,20E-04	2,65E-03
2,50E-02	4,94E-05	1,44E-05	4,15E-05	5,96E-05	5,96E-05	6,67E-05	6,75E-05	7,10E-05	-6,05E-05
1,25E-02	2,87E-06	7,71E-06	9,92E-07	3,59E-06	2,84E-06	3,88E-06	3,57E-06	4,08E-06	2,75E-06
6,25E-03	1,62E-06	6,72E-07	1,12E-07	2,06E-08	4,70E-08	7,97E-09	1,09E-08	1,01E-08	1,14E-08
3,13E-03	1,46E-06	3,51E-09	2,44E-09	5,02E-10	1,65E-09	8,28E-10	2,45E-10	3,56E-10	3,61E-10
1,56E-03	5,65E-07	1,94E-09	6,83E-12	2,76E-12	7,34E-12	4,17E-12	1,27E-11	5,61E-12	-2,18E-11
7,81E-04	3,96E-08	1,93E-10	2,50E-13	2,54E-15	7,39E-15	4,30E-15	6,94E-14	3,65E-14	1,04E-13
3,91E-04	5,72E-10	3,13E-12	4,34E-15	1,23E-17	1,84E-18	1,06E-18	7,28E-17	3,94E-17	-1,06E-16
1,95E-04	6,62E-11	7,00E-13	1,73E-17	7,41E-20	2,27E-22	6,55E-23	1,81E-20	9,87E-21	2,62E-20
9,77E-05	6,37E-11	8,84E-14	1,89E-20	3,59E-21	1,16E-25	5,67E-28	1,11E-24	6,06E-25	-1,60E-24
4,88E-05	6,37E-11	1,19E-14	2,02E-21	1,13E-22	2,35E-29	4,63E-29	6,85E-29	6,06E-29	-1,54E-28
2,44E-05	6,37E-11	1,75E-15	2,03E-21	3,86E-24	6,00E-29	5,99E-29	6,00E-29	4,37E-28	2,18E-24
1,22E-05	2,79E-11	6,09E-16	9,62E-21	2,69E-25	2,66E-28	2,68E-28	2,73E-28	4,56E-25	-5,87E-22
6,10E-06	2,61E-12	8,55E-17	8,13E-22	9,37E-27	4,53E-28	4,54E-28	2,52E-28	2,21E-22	-7,58E-18
3,05E-06	5,72E-13	2,95E-18	1,38E-23	1,74E-27	1,42E-27	1,42E-27	1,73E-25	4,71E-20	6,56E-16
1,53E-06	1,27E-13	4,10E-19	1,18E-24	7,84E-28	7,70E-28	6,44E-28	7,07E-23	4,44E-18	-3,08E-12
7,63E-07	4,70E-14	4,55E-20	7,63E-26	3,74E-27	3,73E-27	2,48E-27	3,64E-21	1,23E-14	3,67E-09
3,81E-07	1,98E-14	7,85E-21	4,88E-26	5,56E-26	5,57E-26	3,38E-24	1,59E-19	4,80E-12	7,05E-08
1,91E-07	3,52E-15	9,84E-22	2,39E-25	2,40E-25	2,40E-25	1,64E-22	1,34E-15	7,87E-10	5,47E-08
9,54E-08	2,86E-17	1,30E-22	3,19E-25	3,19E-25	3,18E-25	1,99E-22	3,22E-14	3,47E-07	-3,82E-03
4,77E-08	9,13E-17	3,41E-23	2,09E-24	2,09E-24	1,92E-24	5,19E-18	9,88E-12	6,76E-05	1,27E-03
2,38E-08	5,16E-17	3,96E-25	1,11E-24	1,11E-24	5,33E-24	6,74E-16	4,11E-08	2,34E-04	-8,48E-05

Tabela 40 – Ordem efetiva (acurácia) sem MER (pEh), variável  $x_{max}$ , malha B.

$h$	$pEh, p = 2$	$pEh, p = 3$	$pEh, p = 4$	$pEh, p = 5$	$pEh, p = 6$	$pEh, p = 7$	$pEh, p = 8$	$pEh, p = 9$	$pEh, p = 10$
1,00E-01									
5,00E-02	1,88E+00	1,97E+00	1,97E+00	1,95E+00	1,96E+00	1,95E+00	1,96E+00	1,95E+00	
2,50E-02	2,04E+00	2,02E+00	2,06E+00	2,08E+00	2,09E+00	2,09E+00	2,10E+00	2,10E+00	2,10E+00
1,25E-02	2,00E+00	2,05E+00	2,01E+00	2,00E+00	2,01E+00	2,01E+00	2,01E+00	2,01E+00	2,01E+00
6,25E-03	1,96E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
3,13E-03	2,13E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
1,56E-03	1,83E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
7,81E-04	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
3,91E-04	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
1,95E-04	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
9,77E-05	2,01E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
4,88E-05	2,03E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
2,44E-05	2,11E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
1,22E-05	1,86E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
6,10E-06	2,02E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
3,05E-06	2,06E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
1,53E-06	1,97E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	5,81E+00
7,63E-07	2,06E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	1,98E+00	-1,39E+01
3,81E-07	1,90E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	-2,57E+00	-4,29E+00
1,91E-07	2,05E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	1,96E+00	-7,30E+00	-1,29E-01
9,54E-08	2,02E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,21E-01		1,62E+01
4,77E-08	1,97E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	-7,76E+00		2,44E+00
2,38E-08	2,07E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	4,59E+00	-1,20E+01		

Tabela 41 – Ordem efetiva (acurácia) com MER ( $pEm$ ), variável  $x_{max}$ , malha B.

$h$	$pEm, p = 2$	$pEm, p = 3$	$pEm, p = 4$	$pEm, p = 5$	$pEm, p = 6$	$pEm, p = 7$	$pEm, p = 8$	$pEm, p = 9$	$pEm, p = 10$
1,00E-01									
5,00E-02	5,17E+00	7,40E+00	7,25E+00	6,47E+00	6,78E+00	6,46E+00	6,60E+00	6,41E+00	
2,50E-02	2,54E+00	2,05E+00	6,83E-01	9,36E-01	6,40E-01	7,90E-01	6,48E-01	7,58E-01	5,45E+00
1,25E-02	4,11E+00	9,04E-01	5,39E+00	4,05E+00	4,39E+00	4,10E+00	4,24E+00	4,12E+00	4,46E+00
6,25E-03	8,24E-01	3,52E+00	3,15E+00	7,45E+00	5,92E+00	8,93E+00	8,36E+00	8,66E+00	7,92E+00
3,13E-03	1,53E-01	7,58E+00	5,52E+00	5,36E+00	4,84E+00	3,27E+00	5,47E+00	4,83E+00	4,97E+00
1,56E-03	1,37E+00	8,53E-01	8,48E+00	7,50E+00	7,81E+00	7,63E+00	4,27E+00	5,99E+00	4,05E+00
7,81E-04	3,83E+00	3,33E+00	4,77E+00	1,01E+01	9,96E+00	9,92E+00	7,52E+00	7,26E+00	7,71E+00
3,91E-04	6,11E+00	5,94E+00	5,85E+00	7,69E+00	1,20E+01	1,20E+01	9,90E+00	9,85E+00	9,93E+00
1,95E-04	3,11E+00	2,16E+00	7,97E+00	7,38E+00	1,30E+01	1,40E+01	1,20E+01	1,20E+01	1,20E+01
9,77E-05	5,56E-02	2,98E+00	9,83E+00	4,37E+00	1,09E+01	1,68E+01	1,40E+01	1,40E+01	1,40E+01
4,88E-05	-5,55E-05	2,89E+00	3,23E+00	4,99E+00	1,23E+01	3,62E+00	1,40E+01	1,33E+01	1,34E+01
2,44E-05	1,35E-08	2,77E+00	-2,95E-03	4,88E+00	-1,35E+00	-3,73E-01	1,92E-01	-2,85E+00	-1,38E+01
1,22E-05	1,19E+00	1,52E+00	-2,25E+00	3,84E+00	-2,15E+00	-2,16E+00	-2,18E+00	-1,00E+01	-8,08E+00
6,10E-06	3,42E+00	2,83E+00	3,56E+00	4,84E+00	-7,65E-01	-7,61E-01	1,17E-01	-8,92E+00	-1,37E+01
3,05E-06	2,19E+00	4,86E+00	5,88E+00	2,42E+00	-1,65E+00	-1,64E+00	-9,43E+00	-7,74E+00	-6,44E+00
1,53E-06	2,18E+00	2,85E+00	3,54E+00	1,15E+00	8,79E-01	1,14E+00	-8,67E+00	-6,56E+00	-1,22E+01
7,63E-07	1,43E+00	3,17E+00	3,96E+00	-2,25E+00	-2,28E+00	-1,94E+00	-5,69E+00	-1,14E+01	-1,02E+01
3,81E-07	1,25E+00	2,54E+00	6,46E-01	-3,89E+00	-3,90E+00	-1,04E+01	-5,45E+00	-8,61E+00	-4,26E+00
1,91E-07	2,49E+00	3,00E+00	-2,29E+00	-2,11E+00	-2,11E+00	-5,60E+00	-1,30E+01	-7,36E+00	3,68E-01
9,54E-08	6,94E+00	2,92E+00	-4,17E-01	-4,13E-01	-4,06E-01	-2,79E-01	-4,59E+00	-8,79E+00	-1,61E+01
4,77E-08	-1,68E+00	1,93E+00	-2,71E+00	-2,71E+00	-2,59E+00	-1,47E+01	-8,26E+00	-7,61E+00	1,59E+00
2,38E-08	8,24E-01	6,43E+00	9,09E-01	9,10E-01	-1,48E+00	-7,02E+00	-1,20E+01	-1,79E+00	3,91E+00

### A.3.6 Variável $T_{max}$



Tabela 42 – Módulo de  $Eh$ , variável  $T_{max}$ , malha B.

$h$	$Eh, p = 2$	$Eh, p = 3$	$Eh, p = 4$	$Eh, p = 5$	$Eh, p = 6$	$Eh, p = 7$	$Eh, p = 8$	$Eh, p = 9$	$Eh, p = 10$
1,00E-01	2,13E-02	2,10E-02	2,09E-02	2,08E-02	2,10E-02	2,09E-02	2,10E-02	2,09E-02	
5,00E-02	5,40E-03	5,38E-03	5,38E-03	5,38E-03	5,39E-03	5,39E-03	5,39E-03	5,39E-03	5,39E-03
2,50E-02	1,35E-03	1,35E-03	1,35E-03	1,35E-03	1,35E-03	1,35E-03	1,35E-03	1,35E-03	1,35E-03
1,25E-02	3,39E-04	3,38E-04	3,38E-04	3,38E-04	3,38E-04	3,38E-04	3,38E-04	3,38E-04	3,38E-04
6,25E-03	8,45E-05	8,46E-05	8,46E-05	8,46E-05	8,46E-05	8,46E-05	8,46E-05	8,46E-05	8,46E-05
3,13E-03	2,12E-05	2,11E-05	2,11E-05	2,11E-05	2,11E-05	2,11E-05	2,11E-05	2,11E-05	2,11E-05
1,56E-03	5,29E-06	5,29E-06	5,29E-06	5,29E-06	5,29E-06	5,29E-06	5,29E-06	5,29E-06	5,29E-06
7,81E-04	1,32E-06	1,32E-06	1,32E-06	1,32E-06	1,32E-06	1,32E-06	1,32E-06	1,32E-06	1,32E-06
3,91E-04	3,30E-07	3,30E-07	3,30E-07	3,30E-07	3,30E-07	3,30E-07	3,30E-07	3,30E-07	3,30E-07
1,95E-04	8,26E-08	8,26E-08	8,26E-08	8,26E-08	8,26E-08	8,26E-08	8,26E-08	8,26E-08	8,26E-08
9,77E-05	2,06E-08	2,06E-08	2,06E-08	2,06E-08	2,06E-08	2,06E-08	2,06E-08	2,06E-08	2,06E-08
4,88E-05	5,16E-09	5,16E-09	5,16E-09	5,16E-09	5,16E-09	5,16E-09	5,16E-09	5,16E-09	5,16E-09
2,44E-05	1,29E-09	1,29E-09	1,29E-09	1,29E-09	1,29E-09	1,29E-09	1,29E-09	1,29E-09	1,29E-09
1,22E-05	3,23E-10	3,23E-10	3,23E-10	3,23E-10	3,23E-10	3,23E-10	3,23E-10	3,23E-10	3,23E-10
6,10E-06	8,07E-11	8,07E-11	8,07E-11	8,07E-11	8,07E-11	8,07E-11	8,07E-11	8,07E-11	8,07E-11
3,05E-06	2,02E-11	2,02E-11	2,02E-11	2,02E-11	2,02E-11	2,02E-11	2,02E-11	2,02E-11	2,02E-11
1,53E-06	5,04E-12	5,04E-12	5,04E-12	5,04E-12	5,04E-12	5,04E-12	5,04E-12	5,04E-12	5,04E-12
7,63E-07	1,26E-12	1,26E-12	1,26E-12	1,26E-12	1,26E-12	1,26E-12	1,26E-12	1,26E-12	1,26E-12
3,81E-07	3,15E-13	3,15E-13	3,15E-13	3,15E-13	3,15E-13	3,15E-13	3,15E-13	3,15E-13	3,15E-13
1,91E-07	7,88E-14	7,88E-14	7,88E-14	7,88E-14	7,88E-14	7,88E-14	8,01E-14	8,58E-10	4,74E-03
9,54E-08	1,97E-14	1,97E-14	1,97E-14	1,97E-14	1,97E-14	1,97E-14	2,61E-14	3,22E-07	3,96E+07
4,77E-08	4,92E-15	4,92E-15	4,92E-15	4,92E-15	4,92E-15	4,92E-15	1,14E-11	8,30E-05	1,62E+02
2,38E-08	1,23E-15	1,23E-15	1,23E-15	1,23E-15	1,23E-15	7,59E-16	5,86E-08	1,51E+00	9,37E+06

Tabela 43 – Módulo de  $Em$ , variável  $T_{max}$ , malha B.

$h$	$Em, p = 2$	$Em, p = 3$	$Em, p = 4$	$Em, p = 5$	$Em, p = 6$	$Em, p = 7$	$Em, p = 8$	$Em, p = 9$	$Em, p = 10$
1,00E-01	2,13E-02	2,10E-02	2,09E-02	2,08E-02	2,10E-02	2,09E-02	2,10E-02	2,09E-02	
5,00E-02	8,93E-05	1,72E-04	2,03E-04	2,36E-04	1,76E-04	2,10E-04	1,69E-04	2,01E-04	5,39E-03
2,50E-02	1,11E-05	6,38E-06	7,05E-06	9,60E-06	6,29E-06	8,57E-06	6,30E-06	8,43E-06	4,37E-06
1,25E-02	3,56E-06	9,96E-07	5,49E-07	5,00E-07	5,79E-07	5,64E-07	6,10E-07	6,10E-07	5,24E-07
6,25E-03	4,91E-07	5,02E-08	2,03E-08	1,19E-08	1,97E-08	1,55E-08	2,07E-08	1,80E-08	1,90E-08
3,13E-03	6,06E-08	4,40E-10	2,65E-10	1,20E-10	2,43E-10	1,70E-10	2,83E-10	2,20E-10	2,83E-10
1,56E-03	6,98E-09	2,05E-11	9,04E-13	4,08E-13	8,86E-13	5,95E-13	1,52E-12	1,03E-12	1,73E-12
7,81E-04	3,62E-10	8,60E-13	1,66E-15	3,74E-16	8,49E-16	5,64E-16	3,38E-15	1,94E-15	4,35E-15
3,91E-04	5,42E-12	1,20E-14	3,23E-17	1,60E-20	2,07E-19	1,37E-19	2,69E-18	1,41E-18	3,67E-18
1,95E-04	1,97E-14	1,84E-18	1,20E-19	3,90E-22	1,34E-23	8,33E-24	6,20E-22	3,13E-22	8,62E-22
9,77E-05	1,27E-15	5,17E-18	1,16E-22	1,54E-25	9,65E-28	1,64E-28	3,73E-26	1,87E-26	5,21E-26
4,88E-05	1,24E-15	6,55E-19	5,19E-26	6,68E-27	2,39E-30	2,21E-30	2,78E-30	2,47E-30	5,95E-27
2,44E-05	1,24E-15	8,86E-20	2,42E-26	5,89E-28	3,79E-28	3,79E-28	3,79E-28	7,29E-28	2,12E-24
1,22E-05	1,82E-15	1,64E-20	2,20E-26	4,38E-28	4,31E-28	4,31E-28	4,29E-28	3,85E-25	4,45E-21
6,10E-06	1,61E-16	2,60E-21	3,81E-26	4,86E-27	4,87E-27	4,87E-27	5,70E-27	2,69E-22	3,89E-19
3,05E-06	1,53E-18	2,76E-23	7,31E-27	6,42E-27	6,42E-27	6,42E-27	4,50E-25	1,11E-19	9,90E-16
1,53E-06	4,04E-18	7,96E-24	2,10E-26	2,10E-26	2,10E-26	2,04E-26	1,94E-23	2,67E-18	3,10E-12
7,63E-07	8,54E-19	1,25E-24	9,75E-26	9,75E-26	9,75E-26	9,29E-26	1,64E-21	1,18E-14	2,57E-09
3,81E-07	1,10E-19	2,33E-25	3,35E-25	3,35E-25	3,35E-25	3,56E-24	2,26E-18	1,33E-12	1,63E-07
1,91E-07	6,11E-21	3,29E-25	3,24E-25	3,24E-25	3,24E-25	8,18E-23	1,89E-15	1,25E-09	6,88E-03
9,54E-08	9,00E-22	4,18E-24	4,18E-24	4,18E-24	4,18E-24	6,68E-21	8,64E-15	4,67E-07	5,75E+07
4,77E-08	1,89E-22	2,06E-23	2,06E-23	2,06E-23	2,05E-23	2,93E-19	1,66E-11	1,20E-04	1,92E+07
2,38E-08	6,00E-23	3,26E-23	3,26E-23	3,26E-23	3,55E-23	6,85E-16	8,52E-08	2,19E+00	1,23E+07

Tabela 44 – Ordem efetiva (acurácia) sem MER ( $pEh$ ), variável  $T_{max}$ , malha B.

$h$	$pEh, p = 2$	$pEh, p = 3$	$pEh, p = 4$	$pEh, p = 5$	$pEh, p = 6$	$pEh, p = 7$	$pEh, p = 8$	$pEh, p = 9$	$pEh, p = 10$
1,00E-01									
5,00E-02	1,98E+00	1,96E+00	1,96E+00	1,95E+00	1,96E+00	1,96E+00	1,97E+00	1,96E+00	
2,50E-02	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
1,25E-02	1,99E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
6,25E-03	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
3,13E-03	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
1,56E-03	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
7,81E-04	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
3,91E-04	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
1,95E-04	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
9,77E-05	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
4,88E-05	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
2,44E-05	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
1,22E-05	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
6,10E-06	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
3,05E-06	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
1,53E-06	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00
7,63E-07	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	1,99E+00	2,80E+00
3,81E-07	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	4,01E-02	
1,91E-07	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	1,98E+00		
9,54E-08	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	1,62E+00	-8,55E+00	-3,30E+01
4,77E-08	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	-8,78E+00	-8,01E+00	1,79E+01
2,38E-08	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	2,70E+00	-1,23E+01	-1,41E+01	

Tabela 45 – Ordem efetiva (acurácia) com MER ( $pEm$ ), variável  $T_{max}$ , malha B.

$h$	$pEm, p = 2$	$pEm, p = 3$	$pEm, p = 4$	$pEm, p = 5$	$pEm, p = 6$	$pEm, p = 7$	$pEm, p = 8$	$pEm, p = 9$	$pEm, p = 10$
1,00E-01									
5,00E-02	7,90E+00	6,93E+00	6,69E+00	6,46E+00	6,90E+00	6,64E+00	6,96E+00	6,70E+00	
2,50E-02	3,01E+00	4,75E+00	4,85E+00	4,62E+00	4,81E+00	4,61E+00	4,75E+00	4,58E+00	1,03E+01
1,25E-02	1,64E+00	2,68E+00	3,68E+00	4,26E+00	3,44E+00	3,93E+00	3,37E+00	3,79E+00	3,06E+00
6,25E-03	2,86E+00	4,31E+00	4,76E+00	5,40E+00	4,88E+00	5,19E+00	4,88E+00	5,09E+00	4,79E+00
3,13E-03	3,02E+00	6,83E+00	6,26E+00	6,63E+00	6,34E+00	6,51E+00	6,20E+00	6,35E+00	6,07E+00
1,56E-03	3,12E+00	4,43E+00	8,20E+00	8,20E+00	8,10E+00	8,16E+00	7,54E+00	7,74E+00	7,35E+00
7,81E-04	4,27E+00	4,57E+00	9,09E+00	1,01E+01	1,00E+01	1,00E+01	8,81E+00	9,05E+00	8,64E+00
3,91E-04	6,06E+00	6,16E+00	5,68E+00	1,45E+01	1,20E+01	1,20E+01	1,03E+01	1,04E+01	1,02E+01
1,95E-04	8,10E+00	1,27E+01	8,07E+00	5,36E+00	1,39E+01	1,40E+01	1,21E+01	1,21E+01	1,21E+01
9,77E-05	3,96E+00	-1,49E+00	1,00E+01	1,13E+01	1,38E+01	1,56E+01	1,40E+01	1,40E+01	1,40E+01
4,88E-05	2,34E-02	2,98E+00	1,11E+01	4,52E+00	8,66E+00	6,21E+00	1,37E+01	1,29E+01	3,13E+00
2,44E-05	-5,77E-06	2,89E+00	1,10E+00	3,50E+00	-7,31E+00	-7,42E+00	-7,09E+00	-8,21E+00	-8,48E+00
1,22E-05	-5,52E-01	2,44E+00	1,33E-01	4,27E-01	-1,86E-01	-1,86E-01	-1,80E-01	-9,04E+00	-1,10E+01
6,10E-06	3,51E+00	2,65E+00	-7,89E-01	-3,47E+00	-3,50E+00	-3,50E+00	-3,73E+00	-9,45E+00	-6,45E+00
3,05E-06	6,71E+00	6,56E+00	2,38E+00	-4,01E-01	-4,00E-01	-4,00E-01	-6,30E+00	-8,69E+00	-1,13E+01
1,53E-06	-1,40E+00	1,80E+00	-1,52E+00	-1,71E+00	-1,71E+00	-1,67E+00	-5,43E+00	-4,59E+00	-1,16E+01
7,63E-07	2,24E+00	2,67E+00	-2,21E+00	-2,22E+00	-2,22E+00	-2,19E+00	-6,40E+00	-1,21E+01	-9,69E+00
3,81E-07	2,95E+00	2,43E+00	-1,78E+00	-1,78E+00	-1,78E+00	-5,26E+00	-1,04E+01	-6,82E+00	-5,99E+00
1,91E-07	4,17E+00	-5,00E-01	4,67E-02	4,67E-02	4,77E-02	-4,52E+00	-9,71E+00	-9,87E+00	-1,54E+01
9,54E-08	2,76E+00	-3,67E+00	-3,69E+00	-3,69E+00	-3,69E+00	-6,35E+00	-2,19E+00	-8,55E+00	-3,30E+01
4,77E-08	2,25E+00	-2,30E+00	-2,30E+00	-2,30E+00	-2,30E+00	-5,46E+00	-1,09E+01	-8,01E+00	1,58E+00
2,38E-08	1,65E+00	-6,58E-01	-6,58E-01	-6,58E-01	-7,90E-01	-1,12E+01	-1,23E+01	-1,41E+01	6,37E-01

# APÊNDICE B – INTERPOLAÇÕES

Neste apêndice é apresentado a metodologia utilizada para obter as interpolações, utilizadas na obtenção das variáveis de interesse  $T_{2/3}$  (Tipo III),  $x_{max}$  (Tipo V) e  $T_{max}$  (Tipo V).

## B.1 OBTENÇÃO NUMÉRICA DAS INTERPOLAÇÕES

Para implementar o método da **Diferença Dividida de Newton** (Subseção 2.3.2), para  $\phi_i$ ,  $i = 0, \dots, p$  e coordenadas  $\chi_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  no intervalo  $\Omega[\chi_0, \chi_n]$ . Adapta-se o algoritmo recursivo, proposto por Martins (2013):

Passo 1: Entrada de  $n + 1$  pontos nodais

Passo 2: Para  $i = 0, 1, \dots, n$ :  $F_{i,0} = \phi_i$

Passo 3: Para  $i = 1, 2, \dots, n$

Para  $j = 1, 2, \dots, i$

$$F_{i,j} = \frac{F_{i,j-1} - F_{i-1,j-1}}{\chi_i - \chi_{i-j}}$$

(Obs:  $F_{i,i} = F[\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_i]$ , DDN - Diferença Dividida de Newton)

Por fim, denotando

$$d_i = d(i) = F_{i-1,j-1},$$

obtem-se de Martins (2013):

$$\varphi_n(\chi) = d_1 + d_2 \cdot (\chi - \chi_0) + d_3 \cdot (\chi - \chi_0) \cdot (\chi - \chi_1) + \dots + d_{n+1} \cdot (\chi - \chi_0) \cdots (\chi - \chi_{n-1}) \quad (\text{B.1})$$

o polinômio de grau no máximo  $n$  ( $\varphi_n$ ) desejado. A partir da expressão acima, pode-se obter este polinômio em seu formato canônico, isto é:

$$\varphi_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n. \quad (\text{B.2})$$

O polinômio nesta forma, facilita o emprego de métodos de otimização, devido a facilidade de se obter a expressão analítica da derivada do polinômio (MARTINS, 2013).

Para obter os polinômios em seu formato canônico, basta seguir este dois exemplos práticos: para  $n = 1$ , da Eq. (B.2):

$$\varphi_1(x) = a_0 + a_1x \quad (\text{B.3})$$

A fim de determinar os coeficientes  $a_0$  e  $a_1$ , compara-se a equação anterior com a Eq. (B.1) para  $n = 1$ , como estes polinômios são formados pelos mesmos 2 pontos distintos  $x_0$  e  $x_1$  associado as imagens  $y_0$  e  $y_1$  de uma função  $f$ , segue do Teorema 2.3.1 da Seção 2.3.1 a relação já no formato do código computacional adotado:

```
a1 = d2
a0 = -d2*x0+d1
```

para os polinômios serem iguais.

- Analogamente, para  $n = 2$

$$\varphi_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad (\text{B.4})$$

```
a2 = d3
a1 = (d2-d3*x0-d3*x1)
a0 = d1-d2*x0+d3*x0*x1
```

Continua-se com este mecanismo, para obtenção dos coeficientes dos polinômios de ordem 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10. Estes coeficientes podem possuir muitas variáveis, como pode ser visto em Martins (2013), para o polinômio de ordem 10, por exemplo.

Foram utilizadas interpolações polinomiais, para obtenção das variáveis de interesse do tipo III e V, conforme foi proposto na Seção 3.2. As escolhas dos pontos sofrem mudanças, para cada caso. Assumindo que já foram obtidas as soluções numéricas da temperatura (T) nos  $n + 1$  pontos nodais da malha discretizada, são estabelecidas as seguintes escolhas para o ponto base ( $p$ ), para interpolação:

- Variável tipo III ( $T_{2/3}$ ): é escolhida a posição do nó da malha ( $p$ ) ou ponto  $x_p$ , correspondente ao valor mínimo da diferença entre o ponto 2/3 em módulo, isto é:

$$\text{Nó } p \text{ tal que } \left| x_p - \frac{2}{3} \right| = \text{mínimo}; \quad (\text{B.5})$$

para todos os  $n + 1$  pontos nodais da malha discretizada.

- Variável do tipo V ( $x_{max}$  e  $T_{max}$ ): é escolhida a posição do nó da malha ( $p$ ) ou ponto  $x_p$ , correspondente ao valor em que a solução numérica da temperatura (T) é máxima, isto é:

$$\text{Nó } p \text{ tal que } T(x_p) = \text{máximo}; \quad (\text{B.6})$$

para todos os  $n + 1$  pontos nodais da malha discretizada.

Feita à escolha do ponto base, para cada caso, associa-se a ele sua temperatura obtida numericamente neste nó, os outros pontos escolhidos são seus vizinhos, associadas as temperaturas obtidas numericamente, por exemplo, para interpolação de ordem 2:

- Pontos nodais:  $p - 1$  ( $x_{p-1}$ ),  $p$  ( $x_p$ ),  $p + 1$  ( $x_{p+1}$ );
- Temperaturas associadas:  $T_{p-1}$ ,  $T_p$ ,  $T_{p+1}$ .

Portanto, obtêm-se os pontos nodais e suas soluções numéricas associadas, bastando apenas agora, aplicar o algoritmo das Diferenças Dividas de Newton, apresentado no começo desta seção, para obtenção dos polinômios. A Tabela 46, mostra o restante dos pontos escolhidos, com base no ponto  $p$ , para as outras interpolações. Evidentemente que em algumas malhas não será possível a realização de alguma interpolação, ou por falta de pontos, ou por não existir algum ponto escolhido.

Tabela 46 – Pontos escolhidos para interpolações de ordem 2 à 10.

Pontos	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$	$\varphi_5$	$\varphi_6$	$\varphi_7$	$\varphi_8$	$\varphi_9$	$\varphi_{10}$
1	$p - 1$	$p - 1$	$p - 2$	$p - 3$	$p - 3$	$p - 4$	$p - 4$	$p - 5$	$p - 5$
2	$p$	$p$	$p - 1$	$p - 2$	$p - 2$	$p - 3$	$p - 3$	$p - 4$	$p - 4$
3	$p + 1$	$p + 1$	$p$	$p - 1$	$p - 1$	$p - 2$	$p - 2$	$p - 3$	$p - 3$
4		$p + 2$	$p + 1$	$p$	$p$	$p - 1$	$p - 1$	$p - 2$	$p - 2$
5			$p + 2$	$p + 1$	$p + 1$	$p$	$p$	$p - 1$	$p - 1$
6				$p + 2$	$p + 2$	$p + 1$	$p + 1$	$p$	$p$
7					$p + 3$	$p + 2$	$p + 2$	$p + 1$	$p + 1$
8						$p + 3$	$p + 3$	$p + 2$	$p + 2$
9							$p + 4$	$p + 3$	$p + 3$
10								$p + 4$	$p + 4$
11									$p + 5$

$p$  = localização do ponto nodal ( $x_p$ )

A interpolação de ordem 1 (Interpolação linear), só foi utilizada para obtenção da variável  $T_{2/3}$ , após escolhido o ponto base  $p$ , através da Eq. (B.5), se este ponto ( $x_p$ ) é maior ( $>$ ), ou menor ( $<$ ) que  $2/3$ : **se for maior**, os nós  $p - 1$  e  $p$ ; **caso contrário**, os nós  $p$  e  $p + 1$  e aplica-se a mesma metodologia, já explicada anteriormente. Não existe a possibilidade deste ponto coincidir com um nó da malha discretizada, porque esse ponto ( $2/3$ ) é classificado como do tipo III, levando em consideração as malhas iniciais utilizadas neste trabalho.

### B.1.1 Erro de Interpolação

Conforme visto na seção anterior o objetivo da interpolação utilizada aqui é dados  $n + 1$  pontos (nós) distintos  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  e as suas  $n + 1$  temperaturas associadas

$y_0 = \bar{T}(x_0)$ ,  $y_1 = \bar{T}(x_1)$ , ..,  $y_n = \bar{T}(x_n)$ , determinar um polinômio  $\varphi_n(x)$  de grau no máximo  $n$ , tal que:

$$\varphi_n(x_0) = y_0; \quad \varphi_n(x_1) = y_1; \quad \dots \quad \varphi_n(x_n) = y_n; \quad (\text{B.7})$$

em que  $\bar{T}$  é a solução aproximada obtida do modelo matemático, apresentado nas seções 2.1 e 3.3, dada pela equação (3.7)

$$\begin{cases} \frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{-9}{5} e^{3x} & x \in \Omega[0, 1] \\ T(0) = \frac{9}{5}; \quad T(1) = \frac{-e^3}{5} + 5 \end{cases}$$

com o método de Diferenças Finitas.

Para estudo e análise do erro da interpolação ( $\xi_n$ ), aplica-se a equação (2.23):

$$\xi_n(x) = \bar{T}(x) - \varphi_n(x) \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (\text{B.8})$$

Como o objetivo é atender a equação (B.7) e as interpolações são feitas em  $n + 1$  nós da malha, portanto o valor de  $\bar{T}$  é conhecido nestes nós, e portanto faz sentido avaliar o erro de interpolação através da equação (B.8), apenas nos nós que foram realizadas as interpolações, isto é

$$\xi_n(x_k) = \bar{T}(x_k) - \varphi_n(x_k) \quad (\text{B.9})$$

e se

$$\xi_n(x_k) = \bar{T}(x_k) - \varphi_n(x_k) = 0, \quad (\text{B.10})$$

para  $k = 1, 2, \dots, n + 1$ , significa que só existe este polinômio que cumpre esta propriedade do Teorema 2.3.1.

Para facilitar as análises da equação (B.9), utiliza-se a norma  $\|\cdot\|_\infty$  (norma linha), onde

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad x \in \mathbb{R}^{n+1}. \quad (\text{B.11})$$

Deste modo, conforme esta norma se aproxima de zero, mais acurada esta a interpolação. Conforme é mostrado nos resultados deste trabalho, se esta norma contém valores elevados a obtenção da variável de interesse ( $\phi$ ) é afetada e consequentemente MER não obtém resultados significativos em geral.

Através da análise deste erro, pode-se estimar a priori a qualidade da  $\phi$ , obtidos através da interpolação, porque quanto melhor a acurácia deste erro, significa que os coeficientes do polinômio estão mais próximos do verdadeiro, devido ao Teorema 2.3.1 que garante a existência e unicidade deste polinômio. Vale ressaltar que todas implementações feitas no trabalho (incluindo as interpolações), foram realizadas com precisão quádrupla, deste modo foram obtidos resultados significativos, até mesmo nas malhas mais finas. Embora o erro de arredondamento seja inevitável, com a precisão quádrupla pode-se adiá-la consideravelmente.



A principal utilidade desta análise é poder prever as malhas cuja soluções obtidas com a interpolação possivelmente não serão boas, por exemplo na malha 18 em diante da Tabela 47, o erro de interpolação do polinômio de ordem 10 já é bem alto, considerando a precisão utilizada, possivelmente a solução numérica obtida com este polinômio já não vai estar bem acurada, o que afeta consideravelmente o desempenho de MER, na redução de  $Eh$ .

As tabelas a seguir apresentam os erros de interpolação, obtidos para cada variável de interesse, considerando as duas malhas iniciais utilizadas (malha A e malha B). Os espaços em branco nas tabelas significam que a interpolação não pode ser realizada, naquela malha. Os gráficos destes resultados, podem ser vistos no capítulo 4 e foram feitas com escala bilogarítmica.

Tabela 47 – Erro de interpolação, malha A, variável  $T_{2/3}$ .

Malha	N	h	$\xi_1$	$\xi_2$	$\xi_3$	$\xi_4$	$\xi_5$	$\xi_6$	$\xi_7$	$\xi_8$	$\xi_9$	$\xi_{10}$
1	4	3,3E-01	0,0E+00	3,9E-34								
2	7	1,7E-01	0,0E+00	0,0E+00								
3	13	8,3E-02	0,0E+00	7,7E-34	1,2E-33	1,2E-33	2,4E-32	6,2E-32	3,5E-31	6,0E-31	2,1E-29	1,7E-28
4	25	4,2E-02	0,0E+00	3,9E-34	7,7E-34	1,2E-33	1,5E-33	1,2E-33	8,8E-32	2,3E-33	1,2E-33	1,2E-33
5	49	2,1E-02	0,0E+00	3,9E-34	1,5E-33	3,9E-34	7,7E-34	7,7E-34	1,2E-33	1,2E-33	1,9E-33	1,5E-33
6	97	1,0E-02	0,0E+00	3,9E-34	3,9E-34	1,5E-33	7,7E-34	7,7E-34	1,9E-33	1,2E-33	7,7E-34	1,5E-33
7	193	5,2E-03	0,0E+00	3,9E-34	1,2E-33	7,7E-34	1,2E-33	1,2E-33	7,7E-34	7,7E-34	7,7E-34	1,5E-33
8	385	2,6E-03	0,0E+00	3,9E-34	3,9E-34	3,9E-34	1,2E-33	1,2E-33	7,7E-34	3,9E-33	1,2E-33	1,2E-33
9	769	1,3E-03	3,9E-34	3,9E-34	7,7E-34	3,9E-34	1,2E-33	1,2E-33	1,2E-33	1,5E-33	1,2E-33	1,5E-33
10	1537	6,5E-04	0,0E+00	3,9E-34	3,9E-34	3,9E-34	7,7E-34	1,9E-33	2,7E-33	3,1E-33	1,5E-33	7,7E-34
11	3073	3,3E-04	0,0E+00	3,9E-34	1,2E-33	3,9E-34	1,2E-33	1,5E-33	1,9E-33	2,3E-33	1,5E-33	1,2E-33
12	6145	1,6E-04	0,0E+00	7,7E-34	1,2E-33	7,7E-34	1,9E-33	7,7E-34	1,9E-33	1,5E-33	1,5E-33	1,2E-33
13	12289	8,1E-05	3,9E-34	3,9E-34	3,9E-34	1,9E-33	1,9E-33	7,7E-34	1,2E-33	1,9E-33	7,7E-34	1,3E-32
14	24577	4,1E-05	0,0E+00	3,9E-34	7,7E-34	7,7E-34	7,7E-34	3,9E-34	3,9E-34	1,9E-33	8,5E-33	1,1E-29
15	49153	2,0E-05	0,0E+00	3,9E-34	3,9E-34	1,5E-33	1,9E-33	7,7E-34	2,7E-33	1,5E-33	5,4E-31	3,7E-27
16	98305	1,0E-05	3,9E-34	7,7E-34	3,9E-34	3,9E-34	7,7E-34	3,9E-34	7,7E-34	5,3E-32	5,4E-29	2,0E-23
17	196609	5,1E-06	0,0E+00	7,7E-34	7,7E-34	1,2E-33	1,5E-33	1,5E-33	1,2E-33	1,3E-29	1,1E-24	2,1E-20
18	393217	2,5E-06	3,9E-34	3,9E-34	1,2E-33	3,9E-34	7,7E-34	7,7E-34	1,3E-32	6,3E-28	1,4E-22	2,9E-18
19	786433	1,3E-06	3,9E-34	7,7E-34	7,7E-34	7,7E-34	1,2E-33	7,7E-34	1,8E-29	7,3E-25	6,5E-19	1,7E-14
20	1572865	6,4E-07	0,0E+00	3,9E-34	1,2E-33	1,2E-33	1,2E-33	1,9E-33	7,0E-28	3,8E-22	1,8E-16	3,0E-11
21	3145729	3,2E-07	0,0E+00	3,9E-34	3,9E-34	7,7E-34	7,7E-34	8,1E-32	4,6E-26	2,5E-20	5,0E-14	1,4E-08
22	6291457	1,6E-07	0,0E+00	3,9E-34	1,5E-33	1,2E-33	1,2E-33	2,1E-29	5,8E-23	3,1E-17	1,3E-10	3,3E-05
23	12582913	7,9E-08	0,0E+00	3,9E-34	3,9E-34	1,2E-33	7,7E-34	3,5E-28	9,2E-22	3,5E-15	8,9E-09	1,1E-02
24	25165825	4,0E-08	0,0E+00	3,9E-34	3,9E-34	1,2E-33	4,2E-33	1,2E-26	7,9E-20	6,8E-13	4,9E-06	1,2E+01
25	50331649	2,0E-08	0,0E+00	0,0E+00	3,9E-34	3,9E-34	4,1E-32	4,1E-32	7,2E-18	1,9E-11	4,2E-04	2,0E+03

Tabela 48 – Erro de interpolação, malha A, variável  $x_{max}$ .

Malha	$N$	$h$	$\xi_2$	$\xi_3$	$\xi_4$	$\xi_5$	$\xi_6$	$\xi_7$	$\xi_8$	$\xi_9$	$\xi_{10}$
1	4	3,33E-01	3,85E-34								
2	7	1,67E-01	7,70E-34	1,16E-33	7,70E-34	2,31E-33					
3	13	8,33E-02	3,85E-34	3,85E-34	1,54E-33	6,16E-33	8,53E-32	5,62E-32	5,49E-31	1,23E-29	
4	25	4,17E-02	3,85E-34	3,85E-34	7,70E-34	1,31E-32	9,01E-32	3,00E-30	1,49E-29	2,55E-28	9,10E-29
5	49	2,08E-02	0,00E+00	3,85E-34	1,16E-33	1,04E-31	1,71E-30	6,59E-30	2,07E-28	2,53E-27	2,42E-26
6	97	1,04E-02	3,85E-34	3,85E-34	7,70E-34	4,31E-32	4,45E-31	3,96E-29	5,07E-28	4,34E-26	2,51E-25
7	193	5,21E-03	3,85E-34	3,85E-34	3,85E-34	3,85E-34	7,70E-34	7,70E-34	1,16E-33	3,85E-34	1,16E-33
8	385	2,60E-03	0,00E+00	3,85E-34	3,85E-34	7,70E-34	7,70E-34	7,70E-34	7,70E-34	1,54E-33	1,54E-33
9	769	1,30E-03	0,00E+00	3,85E-34	3,85E-34	3,85E-34	3,85E-34	7,70E-34	7,70E-34	7,70E-34	7,70E-34
10	1537	6,51E-04	0,00E+00	7,70E-34	7,70E-34	7,70E-34	7,70E-34	3,85E-34	3,85E-34	1,16E-33	1,54E-33
11	3073	3,26E-04	0,00E+00	3,85E-34	3,85E-34	7,70E-34	3,85E-34	3,85E-34	1,54E-33	1,16E-33	7,70E-34
12	6145	1,63E-04	3,85E-34	3,85E-34	3,85E-34	7,70E-34	1,16E-33	7,70E-34	7,70E-34	1,16E-33	7,70E-34
13	12289	8,14E-05	3,85E-34	3,85E-34	3,85E-34	7,70E-34	3,85E-34	1,16E-33	1,16E-33	3,85E-34	3,85E-34
14	24577	4,07E-05	3,85E-34	3,85E-34	7,70E-34	3,85E-34	7,70E-34	7,70E-34	1,16E-33	7,70E-34	1,29E-31
15	49153	2,03E-05	3,85E-34	3,85E-34	3,85E-34	3,85E-34	1,16E-33	7,70E-34	3,85E-34	6,71E-31	5,65E-27
16	98305	1,02E-05	0,00E+00	3,85E-34	3,85E-34	3,85E-34	7,70E-34	7,70E-34	3,47E-33	1,03E-28	4,77E-25
17	196609	5,09E-06	3,85E-34	1,16E-33	7,70E-34	7,70E-34	7,70E-34	3,85E-34	9,93E-31	1,23E-25	9,43E-22
18	393217	2,54E-06	0,00E+00	3,85E-34	7,70E-34	7,70E-34	3,85E-34	3,35E-32	1,40E-27	9,84E-23	4,48E-18
19	786433	1,27E-06	0,00E+00	3,85E-34	3,85E-34	3,85E-34	7,70E-34	1,58E-30	1,74E-25	3,51E-20	5,25E-16
20	1572865	6,36E-07	0,00E+00	3,85E-34	0,00E+00	3,85E-34	7,70E-34	1,58E-28	1,82E-23	7,08E-18	7,37E-13
21	3145729	3,18E-07	3,85E-34	3,85E-34	3,85E-34	3,85E-34	3,85E-34	9,24E-27	7,28E-22	3,36E-15	1,67E-10
22	6291457	1,59E-07	0,00E+00	3,85E-34	3,85E-34	3,85E-34	4,82E-31	4,01E-25	2,00E-18	1,80E-12	7,51E-07
23	12582913	7,95E-08	0,00E+00	7,70E-34	3,85E-34	7,70E-34	1,88E-28	3,94E-22	6,49E-16	4,01E-09	1,71E-03
24	25165825	3,97E-08	3,85E-34	7,70E-34	3,85E-34	7,70E-34	5,63E-27	3,65E-20	3,34E-14	2,61E-07	5,35E-01
25	50331649	1,99E-08	0,00E+00	0,00E+00	7,70E-34	6,16E-33	1,88E-25	1,53E-18	1,03E-11	4,39E-05	4,25E+02

Tabela 49 – Erro de interpolação, malha B, variável  $T_{2/3}$ .

Malha	$N$	$h$	$\xi_1$	$\xi_2$	$\xi_3$	$\xi_4$	$\xi_5$	$\xi_6$	$\xi_7$	$\xi_8$	$\xi_9$	$\xi_{10}$
1	11	1,0E-01	0,0E+00	9,6E-34	9,6E-34	5,78E-34	8,47E-33					
2	21	5,0E-02	0,0E+00	3,9E-34	1,2E-33	7,7E-34	2,4E-32	1,2E-31	8,3E-31	4,6E-30	3,1E-29	1,3E-28
3	41	2,5E-02	0,0E+00	3,9E-34	7,7E-34	1,2E-33	3,1E-33	1,2E-31	1,3E-31	1,2E-29	1,4E-28	3,0E-28
4	81	1,3E-02	0,0E+00	7,7E-34	3,9E-34	7,7E-34	1,2E-33	6,2E-32	1,4E-30	8,2E-29	1,4E-27	6,0E-26
5	161	6,3E-03	0,0E+00	3,9E-34	3,9E-34	3,9E-34	1,2E-33	1,5E-33	1,2E-33	2,7E-33	1,5E-33	7,7E-34
6	321	3,1E-03	0,0E+00	3,9E-34	1,2E-33	1,2E-33	1,2E-33	7,7E-34	2,7E-33	1,5E-33	1,9E-33	7,7E-34
7	641	1,6E-03	0,0E+00	3,9E-34	1,5E-33	7,7E-34	2,3E-33	7,7E-34	7,7E-34	1,9E-33	2,7E-33	4,6E-33
8	1281	7,8E-04	0,0E+00	3,9E-34	7,7E-34	1,9E-33	7,7E-34	1,5E-33	2,3E-33	3,5E-33	1,2E-33	2,3E-33
9	2561	3,9E-04	0,0E+00	3,9E-34	1,2E-33	3,9E-34	1,2E-33	1,2E-33	1,2E-33	2,3E-33	7,7E-34	1,2E-33
10	5121	2,0E-04	0,0E+00	0,0E+00	7,7E-34	3,9E-34	7,7E-34	3,9E-34	1,2E-33	7,7E-34	1,5E-33	1,2E-33
11	10241	9,8E-05	3,9E-34	3,9E-34	1,2E-33	3,9E-34	7,7E-34	2,3E-33	1,2E-33	1,5E-33	1,9E-33	3,5E-33
12	20481	4,9E-05	0,0E+00	3,9E-34	3,9E-34	7,7E-34	3,9E-34	1,2E-33	1,2E-33	2,3E-33	1,2E-33	1,5E-31
13	40961	2,4E-05	0,0E+00	7,7E-34	0,0E+00	7,7E-34	3,9E-34	7,7E-34	1,5E-33	2,7E-33	1,7E-30	4,7E-27
14	81921	1,2E-05	0,0E+00	3,9E-34	7,7E-34	7,7E-34	1,2E-33	2,3E-33	1,5E-33	2,7E-33	4,6E-29	5,6E-25
15	163841	6,1E-06	3,9E-34	3,9E-34	1,2E-33	3,9E-34	1,2E-33	1,5E-33	1,2E-33	7,7E-31	1,7E-26	4,1E-22
16	327681	3,1E-06	0,0E+00	7,7E-34	7,7E-34	7,7E-34	1,5E-33	7,7E-34	2,0E-32	1,2E-27	5,9E-23	2,4E-18
17	655361	1,5E-06	0,0E+00	3,9E-34	1,5E-33	1,2E-33	1,5E-33	7,7E-34	1,7E-30	7,1E-26	2,2E-20	1,4E-15
18	1310721	7,6E-07	0,0E+00	3,9E-34	3,9E-34	7,7E-34	3,9E-34	1,5E-33	1,2E-28	1,3E-22	6,9E-18	2,2E-12
19	2621441	3,8E-07	0,0E+00	3,9E-34	3,9E-34	7,7E-34	1,2E-33	2,5E-32	1,3E-26	2,8E-20	4,9E-15	1,7E-09
20	5242881	1,9E-07	0,0E+00	3,9E-34	7,7E-34	3,9E-34	1,5E-33	4,2E-30	2,5E-24	2,8E-18	1,6E-12	3,8E-06
21	10485761	9,5E-08	0,0E+00	3,9E-34	7,7E-34	7,7E-34	7,7E-34	6,3E-29	4,4E-22	6,2E-16	1,1E-09	1,1E-03
22	20971521	4,8E-08	0,0E+00	3,9E-34	7,7E-34	3,9E-34	2,7E-33	1,4E-26	6,9E-20	4,4E-13	1,7E-06	3,8E+00
23	41943041	2,4E-08	3,9E-34	3,9E-34	1,2E-33	7,7E-34	2,7E-32	6,3E-25	5,6E-18	5,2E-11	8,7E-04	2,4E+03

Tabela 50 – Erro de interpolação, malha B, variável  $x_{max}$ .

Malha	$N$	$h$	$\xi_2$	$\xi_3$	$\xi_4$	$\xi_5$	$\xi_6$	$\xi_7$	$\xi_8$	$\xi_9$	$\xi_{10}$
1	11	1,00E-01	0,00E+00	3,85E-34	7,70E-34	7,70E-34	5,97E-33	7,51E-33	6,70E-32	1,74E-31	
2	21	5,00E-02	3,85E-34	3,85E-34	3,85E-34	7,70E-33	5,39E-33	9,63E-32	2,57E-31	5,52E-31	7,37E-30
3	41	2,50E-02	3,85E-34	3,85E-34	1,54E-33	1,35E-32	6,81E-31	4,89E-30	4,58E-29	1,05E-27	1,06E-26
4	81	1,25E-02	3,85E-34	0,00E+00	3,85E-34	7,70E-34	7,70E-34	7,70E-34	7,55E-28	7,26E-27	4,49E-25
5	161	6,25E-03	0,00E+00	7,70E-34	7,70E-34	3,85E-34	7,70E-34	7,70E-34	7,70E-34	1,54E-33	1,16E-33
6	321	3,13E-03	3,85E-34	3,85E-34	3,85E-34	7,70E-34	3,85E-34	7,70E-34	1,16E-33	7,70E-34	7,70E-34
7	641	1,56E-03	3,85E-34	7,70E-34	7,70E-34	3,85E-34	3,85E-34	1,54E-33	1,54E-33	7,70E-34	1,16E-33
8	1281	7,81E-04	0,00E+00	3,85E-34	3,85E-34	3,85E-34	3,85E-34	7,70E-34	7,70E-34	7,70E-34	1,16E-33
9	2561	3,91E-04	3,85E-34	3,85E-34	7,70E-34	3,85E-34	3,85E-34	3,85E-34	1,93E-33	7,70E-34	7,70E-34
10	5121	1,95E-04	3,85E-34	3,85E-34	7,70E-34	7,70E-34	7,70E-34	3,85E-34	7,70E-34	7,70E-34	2,31E-33
11	10241	9,77E-05	3,85E-34	3,85E-34	3,85E-34	7,70E-34	7,70E-34	1,16E-33	7,70E-34	1,93E-33	1,76E-30
12	20481	4,88E-05	3,85E-34	7,70E-34	3,85E-34	1,16E-33	1,16E-33	7,70E-34	1,16E-33	5,64E-31	6,97E-27
13	40961	2,44E-05	7,70E-34	3,85E-34	1,16E-33	3,85E-34	7,70E-34	1,16E-33	3,31E-32	7,08E-28	1,89E-24
14	81921	1,22E-05	7,70E-34	3,85E-34	3,85E-34	3,85E-34	7,70E-34	7,70E-34	4,30E-30	4,14E-25	2,55E-21
15	163841	6,10E-06	7,70E-34	3,85E-34	7,70E-34	3,85E-34	7,70E-34	4,81E-32	1,30E-27	2,81E-22	6,41E-18
16	327681	3,05E-06	3,85E-34	3,85E-34	3,85E-34	7,70E-34	3,85E-34	1,26E-30	3,33E-25	8,80E-20	2,13E-15
17	655361	1,53E-06	3,85E-34	3,85E-34	3,85E-34	3,85E-34	7,70E-34	3,44E-28	4,44E-23	1,12E-17	3,57E-12
18	1310721	7,63E-07	3,85E-34	0,00E+00	7,70E-34	7,70E-34	4,35E-32	9,16E-27	8,20E-21	9,73E-15	3,33E-09
19	2621441	3,81E-07	3,85E-34	3,85E-34	3,85E-34	7,70E-34	3,52E-30	7,89E-24	2,76E-18	6,63E-12	3,70E-06
20	5242881	1,91E-07	3,85E-34	7,70E-34	7,70E-34	7,70E-34	1,95E-28	2,99E-22	2,03E-15	1,37E-09	4,71E-03
21	10485761	9,54E-08	0,00E+00	3,85E-34	3,85E-34	7,70E-34	3,49E-27	1,18E-20	3,92E-14	4,92E-07	3,61E-01
22	20971521	4,77E-08	3,85E-34	3,85E-34	7,70E-34	8,09E-32	2,59E-25	3,92E-18	2,30E-11	1,52E-04	3,63E+02
23	41943041	2,38E-08	3,85E-34	0,00E+00	3,85E-34	1,88E-30	4,67E-23	1,60E-15	5,82E-08	1,37E+00	7,39E+06

## B.2 OBTENÇÃO NUMÉRICA DAS VARIÁVEIS TIPO III E V

Nesta seção é apresentado como foram obtidas as soluções numéricas das variáveis do tipo III ( $T_{2/3}$ ) e tipo V ( $x_{max}$  e  $T_{max}$ ). Para tanto, considera-se que já foram obtidas os polinômios ( $\varphi_n$ ) em cada malha, para cada caso, conforme explicado na seção anterior.

### B.2.1 $T_{2/3}$

Para obter a variável de interesse  $T_{2/3}$  numericamente em cada interpolação, basta avaliar a coordenada  $2/3$  em cada polinômio, isto é:

$$T_{2/3} \approx \varphi_n(2/3) = \sum_{i=0}^n a_i (2/3)^i. \quad (\text{B.12})$$

### B.2.2 $x_{max}$ e $T_{max}$

Segundo Martins (2013) como as funções  $\varphi_p$  caracterizam funções convexas (ou côncavas) na região onde a interpolação foi realizada, a coordenada  $x_{max}$  do ponto extremo para os polinômios interpoladores, com  $p = 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9$  e  $10$ , é obtida considerando-se o conceito de ponto crítico. Isto acontece, devido à escolha conveniente dos pontos para interpolação.

O intervalo no qual foram realizadas as interpolações é convexo e possui o ponto ( $x_{max}$ ) onde a temperatura é máxima ( $T_{max}$ ), portanto da teoria básica do cálculo, a raiz da derivada de  $\varphi_p$  é um ponto crítico e ele pode ser de máximo, mínimo ou indeterminado da função  $\varphi_p$ . Porém se obtida a raiz da derivada nas vizinhanças do ponto onde a temperatura é máxima, o ponto crítico obtido de  $\varphi_p$  é um ponto de máximo local para a função  $\varphi_p$  e uma aproximação para  $x_{max}$ , como consequência este ponto crítico avaliado em  $\varphi_p$  é uma aproximação para  $T_{max}$ . Conforme é refinada a malha, estas aproximações tendem a melhorar, até chegar exatamente nos valores de  $x_{max}$  e  $T_{max}$ .

Utiliza-se o método de Newton (MN), também conhecido por Método das Tangentes e o método de Newton Modificado (MNM):

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\varphi_p^{(i)}(x_k)}{\varphi_p^{(ii)}(x_k)} \quad (\text{MN}); \quad (\text{B.13})$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\varphi_p^{(i)}(x_k) \cdot \varphi_p^{(ii)}(x_k)}{(\varphi_p^{(ii)}(x_k))^2 - \varphi_p^{(i)}(x_k) \cdot \varphi_p^{(iii)}(x_k)} \quad (\text{MNM}); \quad (\text{B.14})$$

para obter uma raiz real das derivadas dos polinômios de ordem 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 no intervalo  $\Omega[x_0, x_p]$ , onde

$$x_{max} \in \Omega[x_0, x_p].$$

Como estimativa inicial, utiliza-se ponto  $x_{n*}$ , obtido através do método proposto por Martins (2013):

Passo 1: Para  $n = p + 1$  pontos nodais  $x_0 < x_1 < \dots < x_p$ , defina o intervalo:

$$\Omega[x_0, x_p].$$

Passo 2: Se  $n$  é par, a localização  $n^*$  do ponto  $x_{n^*}$  é:

$$n^* = \frac{n}{2},$$

se  $n$  é ímpar

$$n^* = \frac{n}{2} + 1.$$

Utiliza-se como critério de parada

$$|x_k - x_{k+1}| < 10^{-31}, \quad (\text{B.15})$$

nos testes realizados, o método de Newton e Newton modificado convergiu rapidamente. Para evitar ciclos infinitos, caso o método não convirja para o critério de parada, em alguma malha, foram realizadas ao menos 300 iterações, assim caso o critério de parada não seja alcançado, o erro de iteração estará reduzido ao máximo. Os pontos escolhidos são os da Tabela 46, com o ponto base  $p$  correspondendo ao nó onde a temperatura é máxima.

Para o polinômio  $\varphi_2$ , com ordem 2:

$$\varphi_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2,$$

a raiz da derivada é obtida analiticamente, devido a facilidade da sua obtenção.

Finalmente, a raiz obtida pelo método de Newton (ou MNM), ou analiticamente (caso  $p = 2$ ), corresponde a variável  $x_{max}$  e o polinômio avaliado nesta variável, corresponde a variável  $T_{max}$ , obtidos numericamente em cada interpolação.

Pelas particularidades do problema os polinômios possuem ao menos uma raiz real, para as suas derivadas. Podendo ser obtida através dos métodos discutidos anteriormente. Para mais informações teóricas deste método, recomenda-se a leitura de Martins (2013).